

ORSAY

Série A. N°

N° D'ordre : 386

Inscrit aux archives originales
du Centre de Documentation
C.N.R.S. sous le N°

A.O. 2458

T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Yoichiro FURUTANI

1ère Thèse

Rayonnement d'une particule chargée dans
un magnétoplasma sur des modes à indice de
réfraction élevé

2ème Thèse : Propositions données par la Faculté

Soutenues le 27 Juin 1968 devant la Commission d'examen :

MM. J. YVON

Président

J.L. DELCROIX

J. COSTE

J.F. DENISSE

} Examinateurs

Membre invité

REMERCIEMENTS

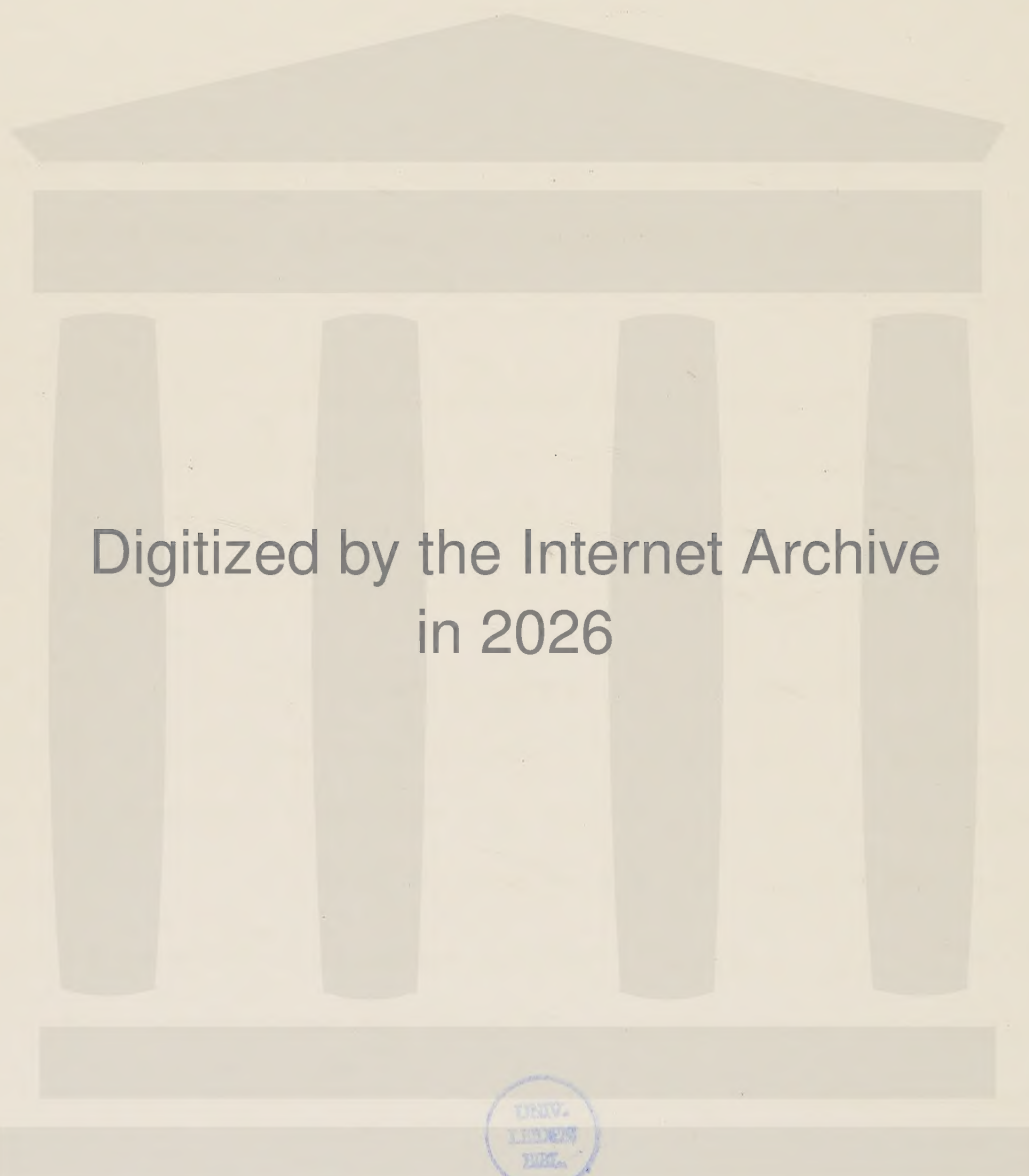
=====

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J.L. DELCROIX de m'avoir accueilli au Laboratoire de Physique des Plasmas de la Faculté des Sciences d'Orsay.

J'exprime ma plus profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur G. KALMAN qui m'a initié à la recherche théorique et a dirigé ce travail avec la plus grande bienveillance. Son aide constante et les discussions fructueuses qu'il m'a prodiguées m'ont été plus que précieuses.

Je remercie tout particulièrement Monsieur J. COSTE, Maître de Recherches au C.N.R.S., pour l'aide active et sans réserves qu'il m'a apportée tout au long de ce travail. Son assistance permanente à la mise en forme de cette thèse m'a été extrêmement utile.

Que Monsieur D. QUEMADA, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris, avec qui j'ai eu de nombreuses discussions, en soit vivement remercié.



Digitized by the Internet Archive
in 2026



https://archive.org/details/IA41554024_0018

SOMMAIRE

	Pages
INTRODUCTION.	1
<u>Première Partie</u> : RESOLUTION DE L'EQUATION DE DISPERSION D'UN MAGNETOPLASMA CHAUD AU VOISINAGE DES HARMONIQUES DE LA FREQUENCE CYCLOTRON ELECTRONIQUE.	5
<u>Deuxième Partie</u> : PERTE D'ENERGIE D'UNE PARTICULE TEST DANS UN MAGNETOPLASMA FROID.	16
II-A - Formulation de la perte d'énergie.	17
II-B - Perte d'énergie au voisinage des résonances d'indices.	27
1/- Mode extraordinaire.	27
2/- Mode ordinaire.	30
II-C - Composantes longitudinale et transverse de la perte d'énergie.	33
- Mode extraordinaire.	35
- Mode ordinaire.	36
<u>Troisième Partie</u> : ANALYSE DU SPECTRE DU RAYONNEMENT CYCLOTRON- CERENKOV PROTONIQUE EN BASSES FREQUENCES.	38
A/- Mode extraordinaire.	40
A-1/- Distribution angulaire.	41
A-2/- Spectre de fréquence.	45
A-3/- Intensite totale du rayonnement.	46
B/- Mode ordinaire.	46
B-1/- Rayonnement normal ($s > 0$, $\cos\theta < 0$).	48
B-2/- Rayonnement Cerenkov ($s = 0$, $\cos\theta > 0$).	55
B-3/- Rayonnement anormal ($s < 0$, $\cos\theta > 0$).	57
CONCLUSION.	60
<u>Appendice A</u> : CALCUL DU VECTEUR PROPRE $\alpha^{(i)}$ ET FACTEUR $\left(\frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial \omega^2}\right)_{x_i^2}$	62
<u>Appendice B</u> : NEGATIVITE DE G_i	65
<u>Appendice C</u> : CALCUL DES INTEGRALES (III-30) et (III-35)	67
BIBLIOGRAPHIE.	70

INTRODUCTION

Trubnikov et Kudryavtsev⁽¹⁾ ont souligné les premiers l'importance de l'émission cyclotron dans le rayonnement d'un plasma confiné à haute température. De nombreux travaux théoriques sur ce type d'émission^(2,3,4,5,6,7,8,9) ont été développés dans la suite dans l'optique de la fusion contrôlée. En 1961, l'intérêt du sujet était renouvelé par les observations expérimentales de Landauer^(10,11). Il s'agissait cette fois du rayonnement dans un plasma à basse température (plasma de décharge Penning) : on a observé des raies d'émission sur un nombre élevé (une quarantaine) d'harmoniques de la fréquence cyclotron électronique ω_H . Cette expérience, ayant suscité un grand intérêt, a été suivi de beaucoup d'autres^(12,13,14,15,16,17,18). En basses fréquences également on a observé sur la machine OGRA les premiers harmoniques de la fréquence cyclotron ionique Ω_H ⁽¹⁹⁾.

Indépendamment du problème de la génération d'harmoniques qui a motivé en partie ce travail, l'étude du rayonnement d'une particule test dans le milieu anisotrope et dispersif constitué par un magnétoplasma présente plusieurs aspects intéressants. En effet ce rayonnement peut être très différent du rayonnement dans le vide et, ceci en particulier si l'effet diélectrique du milieu entraîne que les longueurs d'onde des différents modes émis ne sont pas très grandes par rapport au rayon de Larmor de la particule émettrice. Voyons tout de suite, pour préciser cette idée, dans quelle condition le spectre rayonné par une particule chargée en gyration autour d'une ligne de force du champ magnétique sera riche en harmoniques de la fréquence cyclotron.

Rappelons brièvement les caractéristiques du rayonnement dans le vide : si la particule est non relativiste la majeure partie de l'énergie rayonnée est concentrée sur le fondamental ($\omega = \omega_H$) et l'énergie sur les harmoniques décroît très rapidement avec le numéro s de ces harmoniques : comme $\frac{(s+1)s^{2s+1}}{(2s+1)!} \left(\frac{v}{c}\right)^{2s}$, v étant la composante de vitesse de la particule perpendiculaire au champ magnétique B_0 . Si la particule est relativiste on trouve de l'énergie rayonnée jusqu'à un numéro d'harmonique $s_{\max}$ qui est donné par

la relation ⁽²⁰⁾ :

$$s_{\max} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2}$$

Quant à la distribution angulaire de rayonnement (voir figure 1), elle décroît quand on s'écarte de 0 à $\frac{\pi}{2}$ de la direction du champ magnétique B_0 pour une particule non relativiste ; elle est concentrée autour de la direction perpendiculaire à B_0 dans le cas d'une particule relativiste (rayonnement synchrotron).

L'existence des harmoniques dans le spectre représente donc un effet relativiste. Il est naturel de penser que l'intensité d'un harmonique dans le rayonnement sera déterminée dans un milieu diélectrique non plus par le rapport $\frac{v}{c}$ mais par le rapport v/v_ϕ de la vitesse de la particule à la vitesse de phase de cet harmonique dans le milieu. Le rôle de ce paramètre (v/v_ϕ) peut être vu assez simplement, en analysant la structure harmonique du champ électrique rayonné par la particule. Supposons que celle-ci effectue le mouvement hélicoïdal autour du champ magnétique B_0 , à la fréquence angulaire Ω_H , représenté sur la figure 2. Le courant associé à ce mouvement a la forme :

$$j_s(x, t) = e \chi(t) \delta[x - x_0(t)]$$

où $x_0(t)$ et $\chi(t)$, vecteur position et vitesse respectivement, caractérisent la trajectoire de la particule test :

$$x_0(t) = (\rho \cos \Omega_H t, -\rho \sin \Omega_H t, v_z t)$$

et

$$\chi(t) = \frac{d}{dt} x_0(t) = (-v_\perp \sin \Omega_H t, -v_\perp \cos \Omega_H t, v_z)$$

$$\rho = \frac{v_\perp}{\Omega_H}, \text{ rayon de Larmor.}$$

L'analyse de Fourier de ce courant donne :

$$j_s(k, \omega) = \frac{e}{(2\pi)^3} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-i)^s j_s(k_\perp \rho) \delta(\omega - s\Omega_H - k_z v_z)$$

où :

$$j_s(k_{\perp} \rho) = \left(\frac{sv_{\perp}}{k_{\perp} \rho} J_s(k_{\perp} \rho) , -iv_{\perp} J'_s(k_{\perp} \rho) , v_z J_s(k_{\perp} \rho) \right)$$

$J_s(k_{\perp} \rho)$ et $J'_s(k_{\perp} \rho)$ étant respectivement la fonction de Bessel d'ordre s et sa dérivée. Cette expression fait apparaître les fréquences caractéristiques données par la relation $\omega = s\Omega_H + k_z v_z$ (s entier positif ou négatif), dite "relation Cerenkov". Le courant $j_s(x, t)$ induit dans le milieu un champ électromagnétique $E_{\lambda}(x, t)$ à longue distance, dont les composantes de Fourier devront satisfaire à la relation de dispersion dans le milieu : $k_{\lambda} = k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega, s)$, n étant l'indice de réfraction dans la direction de k . Il en résulte que l'argument des fonctions de Bessel intervenant dans l'expression de la composante s du champ rayonné sera : $k_{\perp} \rho = s \frac{v_{\perp}}{c} = s \frac{v_{\perp}}{v_{\phi\perp}}$ (avec $v_{\phi\perp} = \frac{c}{n}$). L'amplitude d'une composante s est proportionnelle à celle de $j_s(s \frac{v_{\perp}}{v_{\phi\perp}})$, qui est négligeable sauf si $\frac{v_{\perp}}{v_{\phi\perp}}$ n'est pas petit (exception faite pour $s = 1$). On en conclut que l'apparition d'harmoniques dans le rayonnement nécessite : ou bien une énergie relativiste pour la particule rayonnante dans le cas d'un milieu d'indice de réfraction voisin de l'unité, ou bien dans le cas d'une particule non-relativiste, l'existence d'un indice de réfraction élevé pour les harmoniques de la fréquence cyclotron.

Considérons donc maintenant les possibilités d'indices élevés dans un magnétoplasma. Dans le cas d'un plasma froid l'allure des courbes de dispersion en propagation oblique est montrée sur la figure 3.

Du côté des hautes fréquences il existe une région d'indice élevé dans une bande étroite autour d'une résonance située à gauche de la fréquence hybride haute (mode III de la figure)⁽²¹⁾. Dans le cas d'un plasma ténu ($\omega_0 < \omega_H$) il n'y a pas d'harmoniques de la fréquence cyclotron électronique ω_H dans cette bande. Dans le cas d'un plasma dense ($\omega_0 > \omega_H$) on en trouve un seul. Dans tous les cas on voit donc qu'il ne peut exister, dans un plasma froid, un ensemble d'harmoniques de ω_H à indice élevé. Cette possibilité existe en revanche pour les harmoniques de la fréquence cyclotron protonique Ω_H sur le mode II (voir figure) dit "mode extraordinaire"⁽²²⁾⁽²³⁾. Une dernière région d'indice élevé existe sur des fréquences inférieures à Ω_H (mode I dit "mode ordinaire")⁽²⁴⁾.

Le problème du rayonnement d'une particule test se pose en termes différents selon qu'il s'agit d'un plasma froid ou d'un plasma chaud. Dans le premier cas, comme nous le montrerons, le rayonnement peut être déterminé en calculant la "perte d'énergie" de la particule⁽²⁵⁾. Cette dénomination de "perte d'énergie" n'est pas très heureuse : nous calculons en réalité l'énergie fournie par un générateur qui maintient le mouvement de la particule test, c'est-à-dire, au signe près, la réaction du champ. Dans le cas d'un plasma chaud la perte d'énergie ne s'identifie évidemment plus avec l'énergie rayonnée en raison des mécanismes d'absorption du milieu. On a alors affaire aux théories cinétiques usuelles du rayonnement (e.g. 26). Nous n'avons pas entrepris d'évaluer le rayonnement dans ce cas. Nous nous contenterons de dire, sur la base des raisonnements faits plus haut, que la présence d'indices élevés laisse prévoir une structure harmonique du rayonnement.

Dans la première partie de ce travail, dans le but de rechercher des indices de réfraction élevés, nous étudions les solutions de la relation de dispersion dans un plasma chaud au voisinage des harmoniques de la fréquence cyclotron électronique en propagation quasi-perpendiculaire au champ magnétique^(27,28,29,30,31).

Dans la deuxième partie, nous établissons l'expression générale de la perte d'énergie d'une particule test dans un magnétoplasma froid, de son analyse spectrale en fréquence et de sa distribution angulaire. L'attention sera particulièrement attirée sur les modes lents en basses fréquences pour lesquels le rayonnement présente un caractère cyclotron-Cerenkov combiné. On étudie le problème de la perte d'énergie au voisinage des résonances d'indices (problème connu sous le nom de l'"Infinity catastrophe").

Dans la troisième partie on donne une analyse détaillée du spectre de fréquence et de la distribution angulaire en basses fréquences. On étudie non seulement le mode extraordinaire qui fournit un rayonnement contenant un ensemble de raies sur les harmoniques de la fréquence cyclotron protonique⁽²³⁾ mais aussi le mode ordinaire qui donne un spectre continu dans la bande $(0, \Omega_H)$ ⁽²⁴⁾.

PREMIERE PARTIE

RESOLUTION DE L'EQUATION DE DISPERSION D'UN MAGNETOPLASMA CHAUD

AU VOISINAGE DES HARMONIQUES DE LA FREQUENCE CYCLOTRON ELECTRONIQUE.

La résolution de l'équation de dispersion pour un magnétoplasma chaud au voisinage des harmoniques de la fréquence cyclotron électronique et en propagation perpendiculaire au champ magnétique extérieur est un problème très délicat. Plusieurs travaux importants lui ont déjà été consacrés(27,28,29,30,31,32).

Le point central de ce problème, selon nous, est de savoir dans quelles conditions on peut négliger l'interaction résonnante onde-particules. Pour nous expliquer clairement, le plus simple est de donner d'abord l'expression générale du tenseur diélectrique, qui intervient dans l'équation de dispersion.

Il est bien connu que, si on suppose maxwellienne la fonction de distribution des vitesses des électrons, les composantes de ce tenseur peuvent être mises sous la forme suivante⁽³⁰⁾:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \zeta_0 \frac{e^{-\mu}}{\mu} \sum_{s=-\infty}^{\infty} s^2 I_s(\mu) Z(\zeta_s) \\ \epsilon_{yy} &= 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \zeta_0 \frac{e^{-\mu}}{\mu} \sum_{s=-\infty}^{\infty} [(s^2 - 2s\mu + 2\mu^2) I_s(\mu) - 2\mu^2 I_{s+1}(\mu)] Z(\zeta_s) \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \zeta_0 \frac{e^{-\mu}}{\mu} \sum_{s=-\infty}^{\infty} I_s(\mu) \zeta_s Z'(\zeta_s) \\ \epsilon_{xy} &= -\epsilon_{yx} = -i \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \zeta_0 \frac{e^{-\mu}}{\mu} \sum_{s=-\infty}^{\infty} s [(s-\mu) I_s(\mu) + \mu I_{s+1}(\mu)] Z(\zeta_s) \\ \epsilon_{xz} &= \epsilon_{zx} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \zeta_0 \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{2}\mu} \sum_{s=-\infty}^{\infty} s I_s(\mu) Z'(\zeta_s) \\ \epsilon_{yz} &= -\epsilon_{zy} = -i \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \zeta_0 \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{2}\mu} \sum_{s=-\infty}^{\infty} [(s-\mu) I_s(\mu) + \mu I_{s+1}(\mu)] Z'(\zeta_s) \end{aligned} \right\} \quad (I-1)$$

où les notations utilisées sont définies comme suit :

$$\omega_0 = \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{1/2} \text{ est la fréquence de plasma électronique,}$$

$$\mu = \left(\frac{|\vec{k}| v_T}{\omega_H} \sin \theta \right)^2 = (\omega q \beta_T \sin \theta)^2 \text{ où } \omega = \frac{|\vec{k}| c}{\omega} \text{ est l'indice de réfraction,}$$

$$v_T = \left(\frac{T_e}{m} \right)^{1/2} \text{ est la vitesse d'agitation thermique moyenne d'électrons,}$$

T_e la température électronique en unité d'énergie et θ l'angle entre le vecteur d'onde $\vec{k}$ placé sur le plan xz et le champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ dirigé suivant l'axe z du système de coordonnées carthésiennes (voir Fig. 2)

$I_s(\mu)$ est la fonction de Bessel modifiée du $s^{\text{ième}}$ ordre⁽³³⁾,

$Z(\zeta_s)$ est la fonction de dispersion de plasma⁽³⁴⁾ avec l'argument :

$$\zeta_s = \frac{\omega - s\omega_H}{\sqrt{2} |\vec{k}| v_T \cos \theta}, \text{ définie par}$$

$$\begin{aligned} Z(\zeta_s) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2v_T^2}}{\omega - s\omega_H - |\vec{k}| u \cos \theta + i\eta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta - \zeta_s + i\eta} \end{aligned} \quad (I-2)$$

Enfin la relation de dispersion :

$$\det \left[\frac{\epsilon}{\kappa}(\vec{k}, \omega) - \omega^2 \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa} \right) \right] = 0$$

où κ est le cosinus directeur $\kappa = \frac{k_z}{|\vec{k}|}$, peut s'écrire sous la forme :

$$A \omega^4 - B \omega^2 + C = 0 \quad (I-3)$$

avec

$$A = \kappa \cdot \epsilon \cdot \kappa = \epsilon_{xx} \sin^2 \theta + \epsilon_{zz} \cos^2 \theta + 2\epsilon_{xz} \sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned} B &= (\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} + \epsilon_{xy}^2) \sin^2 \theta + (\epsilon_{yy} \epsilon_{zz} + \epsilon_{yz}^2) \cos^2 \theta - 2(\epsilon_{xy} \epsilon_{yz} - \epsilon_{yy} \epsilon_{xz}) \sin \theta \cos \theta \\ &\quad + \epsilon_{xx} \epsilon_{zz} - \epsilon_{xz}^2 \end{aligned} \quad (I-4)$$

$$\text{et } C = \det \frac{\epsilon}{\kappa} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ -\epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & -\epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

Les composantes du tenseur diélectrique se présentent comme des sommes infinies de termes contenant la fonction de dispersion de plasma. Ceci met en évidence le rôle joué par les particules résonnantes, particules dont la vitesse u parallèle au champ magnétique est telle que

$$\omega - s\omega_H - |k_{\parallel}| u \cos\theta = 0 \quad (\text{I-5})$$

Considérons le cas de la propagation rigoureusement perpendiculaire ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Si la fréquence de l'onde ω est différente d'un harmonique $v\omega_H$ de la fréquence cyclotron, la relation (I-5) n'est satisfaite que pour u infini. C'est-à-dire qu'il n'existe pas de particules résonnantes. En l'absence de ces particules résonnantes on peut utiliser un développement asymptotique de $Z(\zeta_s)$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\zeta_s \rightarrow \infty} Z(\zeta_s) &= -\frac{1}{\zeta_s} \left(1 + \frac{1}{2\zeta_s^2} + \frac{3}{4\zeta_s^4} + \dots \right) + i(\text{partie imaginaire de} \\ &\quad \text{l'ordre de } e^{-\zeta_s^2}) \\ &\approx -\frac{1}{\zeta_s} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-6})$$

En revanche un problème se pose si on considère des fréquences voisines de $v\omega_H$ et des angles de propagations voisins de $\pi/2$. En effet l'un des termes de la somme définissant chaque composante du tenseur $\epsilon_{\parallel}$ est "résonnant" : celui où $s = v$ pour lequel ζ_s n'est pas a priori défini. Même si on se donne initialement θ voisin de $\pi/2$, on ne peut pas préjuger de la valeur de ζ_s , du fait que ω , $|k_{\parallel}|$ et θ seront ultérieurement reliés par la relation de dispersion (I-3). Ceci revient à dire que le fait de négliger l'interaction résonnante des particules avec l'onde doit être vérifié à posteriori par le résultat du calcul de la relation de dispersion. Le critère de validité de cette approximation s'écrit évidemment :

$$\zeta_v = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2}|k_{\parallel}|v_T\phi} \gg 1 \quad (\text{I-7})$$

$$\text{où } \Delta\omega = \omega - s\omega_H, \quad \phi = \left| \frac{\pi}{2} - \theta \right|$$

ϕ et $\Delta\omega$ étant données, la relation de dispersion fournira :

$$|k_{\parallel}| = f(\Delta\omega, \phi) \quad (\text{I-8})$$

En portant (I-8) dans l'inégalité (I-7) on obtiendra une condition reliant φ et $\Delta\omega$ pour que l'approximation soit valable, soit

$$\Delta\omega \gg \sqrt{2} v_T \varphi f(\Delta\omega, \varphi) \quad (I-9)$$

Selon le comportement de la fonction $f(\Delta\omega, \varphi)$ à la limite $\varphi \rightarrow 0$ pour $\Delta\omega$ donné (notons qu'on observe expérimentalement des $\Delta\omega$ petits mais non nuls), les deux situations peuvent théoriquement se produire : ou bien l'inégalité (I-9) entraîne que $\varphi < \varphi_{\max}$, auquel cas la limite $|k| \rightarrow \infty$ est effectivement atteinte en $\varphi = 0$. Ou bien (I-9) donne $\varphi > \varphi_{\min}$, excluant ainsi un domaine autour de $\varphi = 0$, donc invalidant un calcul où la limite sur φ est faite au départ. Ce deuxième cas paraît moins vraisemblable à priori. En tout cas la connaissance de la dépendance en φ de l'indice de réfraction serait très importants pour déterminer le rayonnement d'une particule test dans le milieu. Nous y reviendrons plus loin. C'est pourquoi une analyse détaillée des solutions de la relation de dispersion au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($\varphi \neq 0$) nous paraît nécessaire.

Plusieurs études importantes sur la relation de dispersion en propagation perpendiculaire ont été faites dans le cadre de l'approximation décrite. Citons : I.B. Bernstein⁽²⁷⁾, Y.N. Dnestrovskii et D.P. Kostomarov^(28, 29).

Ces auteurs posent $\varphi = 0$ (ou $\theta = \frac{\pi}{2}$) au début du calcul. L'étude de la relation de dispersion est alors considérablement simplifiée. Néanmoins les calculs n'ont pas été menés de la même manière par les auteurs cités plus haut et ils aboutissent à des résultats différents. Nous allons rapidement rappeler le raisonnement de Bernstein ainsi que les critiques (d'après nous fondées) des soviétiques.

Avec $\varphi = 0$ la relation de dispersion (I-3) se décompose dans les deux équations suivantes :

$$\omega^2 = \epsilon_{zz} \quad (I-10)$$

qui fournit un mode "ordinaire" et

$$\epsilon_{xx} \omega^2 = \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} + \epsilon_{xy}^2 \quad (I-11)$$

qui fournit un mode "extraordinaire" et un mode "longitudinal", ces deux modes étant ainsi dénommés, car ils donnent respectivement les modes ordinaire, extraordinaire et longitudinal dans la limite d'un plasma froid.

Cherchant des solutions à indice élevé ($x \rightarrow \infty$) Bernstein réduit l'équation (I-11) à

$$\epsilon_{xx} = 0 \quad : \text{mode purement longitudinal} \quad (I-12)$$

Ce procédé est au départ criticable puisque les composantes de ϵ_{μ} sont des fonctions de x , dont on ignore le comportement au voisinage des résonances avant d'avoir résolu l'équation de dispersion. Ceci étant, (I-12) peut s'écrire :

$$\mu = \frac{p^2}{q} e^{-\mu} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s^2 I_s(\mu)}{q - s} \equiv \alpha(\mu, q)$$

$$\text{où } p = \frac{\omega_0}{\omega_H} \quad \text{et} \quad q = \frac{\omega}{\omega_H} .$$

Bernstein étudie alors la fonction $\alpha(\mu, q)$ en fonction de q pour μ fixé. α devant être positif ($\mu > 0$), il en conclut qu'une étroite bande de fréquences est interdite à gauche de chaque harmonique de ω_H . Ce raisonnement est contestable pour la même raison que précédemment : on ne peut faire varier q indépendamment de μ , ces deux paramètres étant reliés par la relation de dispersion.

Dnestrovskii et al ont surmonté ces difficultés en travaillant sur l'équation complète (I-11). Leurs résultats sont les suivants :

- 1/- il existe effectivement des résonances d'indice au voisinage des harmoniques.
- 2/- les bandes interdites de Bernstein pour le mode longitudinal subsistent (à gauche des harmoniques de ω_H). En revanche, ces bandes sont occupées par le mode extraordinaire.
- 3/- les caractéristiques des différents modes au voisinage des harmoniques sont les suivantes :

a/- Mode longitudinal et mode extraordinaire

Les courbes de dispersion de ces deux modes sont très complexes. On obtient des résonances d'indice au voisinage des harmoniques de ω_H , dont les expressions sont données par :

$$x \approx (2\pi)^{-1/6} \left[\frac{p^2}{v^2(q-v)} \right]^{1/3} \frac{1}{\beta_T}, \quad q > v \text{ (mode longitudinal)}$$

et

(I-13)

$$x \approx (2\pi)^{-1/6} \left[\frac{p^2}{v^2(v-q)} \right]^{1/3} \frac{1}{\beta_T^{1/3}}, \quad q < v \text{ (mode extraordinaire)}$$

Il existe aussi des solutions qui tendent vers zéro dans la même limite $q \rightarrow v \pm 0$.

b/- Mode ordinaire

L'indice de ce mode tend vers l'infini lorsque $q \rightarrow v - 0$ et vers zéro si $v \rightarrow + 0$.

4/- Les modes obtenus ne sont pas amortis (cette propriété essentielle tient justement au fait qu'on a négligé l'interaction des particules résonnantes avec ces modes).

En conclusion l'existence des modes à indices élevés et non amortis serait d'un intérêt central dans le problème de la production d'harmoniques par un magnétoplasma. Cependant il nous semble, pour les raisons données plus haut, que cette existence ne sera vraiment démontrée que lorsqu'on aura soigneusement analysé la relation de dispersion au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Pour notre part nous avons considéré le problème des indices élevés dans un cas complémentaire de celui que nous venons de présenter. C'est à dire que nous faisons sur le terme résonnant les limites sur ω et θ dans l'ordre suivant :

$$1) \quad \omega \rightarrow v \omega_H$$

$$2) \quad \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

En d'autre terme la fonction $Z(\zeta_s)$ du terme résonnant sera approximée par son développement de Taylor :

$$Z(\zeta_s) \approx i\sqrt{\pi} e^{-\zeta_s^2} + O(\zeta_s) \approx i\sqrt{\pi} \quad (I-14)$$

et dans les autres termes non résonnants nous utiliserons le développement asymptotique :

$$Z(\zeta_s) \approx -\frac{1}{\zeta_s}$$

Physiquement ceci revient à tenir compte de l'interaction onde-particules résonnantes. Nous verrons dans la suite que cette situation physique est réalisée si φ est supérieur à un certain $\varphi_{\min}$ déterminé par les collisions ou par la variation relativiste de la fréquence cyclotron.

Récrivons donc les expressions du tenseur diélectrique avec les approximations indiquées sur le terme résonnant et sur les termes non résonnants. On obtient :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon'_{xx} & i\epsilon''_{xy} & 0 \\ -i\epsilon''_{xy} & \epsilon'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon'_{zz} \end{pmatrix} + i \frac{1}{\varphi} \begin{pmatrix} \epsilon''_{xx} & -i\epsilon'_{xy} & -i\epsilon'_{xz} \\ i\epsilon'_{xy} & \epsilon''_{yy} & \epsilon''_{yz} \\ -i\epsilon'_{xz} & -\epsilon''_{yz} & 0 \end{pmatrix} \quad (I-15)$$

où, par exemple

$$\epsilon'_{xx} = 1 + \frac{p^2}{\mu} [1 - 2 e^{-\mu} I_V(\mu)] + \frac{p^2}{v} \frac{e^{-\mu}}{\mu} \lim_{q \rightarrow v} \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq v}}^{\infty} \frac{I_s(\mu)}{s-q}$$

et

$$\epsilon''_{xx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p^2}{v} \frac{e^{-\mu}}{\mu^{3/2}} I_V(\mu)$$

et des expressions du même type (30) pour les autres composantes qu'il est inutile d'écrire. Cette expression de $\epsilon_{\alpha\beta}$ contient les termes résonnants (car-

me en $\frac{1}{\phi}$) et les termes non résonnants. La résolution exacte de l'équation de dispersion, en tenant compte de l'ensemble de ces termes, est très difficile. Nous avons alors procédé par approximations successives de la manière suivante :

- 1)- On résout l'équation de dispersion en ne conservant que les termes résonnants dans $\frac{\epsilon}{\lambda}$. On obtient ainsi des solutions à indice élevé.
- 2)- On résout la même équation en utilisant seuls les termes non résonnants. On n'obtient pas alors de solutions à indice élevé.
- 3)- On résout la relation de dispersion au voisinage de la solution à indice élevé trouvée dans l'approximation (1) en la perturbant par la présence des termes croisés, résonnants $\times$ non résonnants. On vérifie alors que la solution à l'approximation (1) est peu modifiée.

Nous renvoyons pour le détail de ces calculs à l'article Furutani-Kalman⁽³⁰⁾.

Notons que nous avons utilisé dans ce calcul un développement asymptotique de $I_s(\mu)$:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} e^{-\mu} I_s(\mu) = \frac{1}{(2\pi\mu)^{1/2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right] \quad , \quad (I-16)$$

ce qui signifie que nous avons cherché des solutions à indice assez grand pour que la longueur d'onde soit inférieure au rayon de Larmor thermique.

Nos résultats sont les suivants : nous trouvons deux modes à indice élevé. L'un est un mode quasi-longitudinal. Son indice est donné par

$$\omega \simeq e^{i \frac{\pi}{6}} \left(\frac{b}{2\pi v^3 \phi} \right)^{1/4} \frac{1}{\beta_T^{1/2}} \quad \text{avec } b = \frac{8\pi n m c^2}{B_0^2} = 2p^2 \quad (I-17)$$

et sa polarisation est déterminée par le rapport :

$$\frac{E_x}{E_z} = \left(\frac{2}{\pi^3} \frac{b}{\phi} \right)^{1/4} \frac{1}{\beta_T^{1/2} v^{3/4}} \quad (I-18)$$

On voit dans (I-18) que ce mode n'est pas purement longitudinal, la direction du vecteur d'onde k étant manifestement donnée par $k_x/|k_z| = \frac{1}{\varphi}$.

L'autre est un mode quasi-extraordinaire. L'indice en est donné par

$$n \approx e^{i \frac{\pi}{8}} \left(\frac{b}{4v^3 \varphi} \right)^{1/4} \frac{1}{\beta_T^{1/2}} \quad (\text{I-19})$$

et sa polarisation est telle que

$$\frac{E_x}{E_y} = e^{-i \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2v} \quad (\text{I-20})$$

ce dernier tendant progressivement vers le mode purement extraordinaire au fur et à mesure que v augmente.

Dans les deux cas le point important est que ces modes sont fortement amortis avec un coefficient d'amortissement de l'ordre de

$$k_i \approx \left(\frac{b v}{\varphi} \right)^{1/4} \frac{\beta_T^{1/2}}{\lambda_L} \quad (\text{I-21})$$

où $\lambda_L = \frac{\beta_T}{\omega_H}$, le rayon de Larmor thermique.

Finalement, examinant le domaine de validité de ces résultats, φ doit être inférieur à $\varphi_{\max}$ donné par la condition de validité du développement asymptotique de $Z(\zeta_s)$ pour les termes non résonnants, soit

$$\left| \frac{\omega_H}{\sqrt{2} |k_z| v_T \varphi} \right| \gg 1,$$

ou encore

$$|\varphi| \ll \frac{1}{(bv)^{1/3}} \beta_T^{2/3}, \quad \beta_T = \frac{v_T}{c} \quad (\text{I-22})$$

D'autre part les termes résonnants sont proportionnels à $\frac{1}{\varphi}$, ce qui indique évidemment que φ doit être borné inférieurement. Il est

facile de voir que cette borne inférieure est due soit de l'effet de collision soit de l'effet de la variation relativiste de la fréquence cyclotron. En ce qui concerne un effet de collision il peut être évalué grossièrement en ajoutant un terme $-\omega_{\text{coll}}$ dans l'équation de Vlasov linéarisée, ce qui revient à remplacer ω par $\omega + i\omega_{\text{coll}}$ dans l'argument de la fonction $Z(\zeta_s)$. La condition de validité d'un développement de Taylor du terme résonnant s'écrit donc

$$\left| \frac{\omega_{\text{coll}}}{\sqrt{2}|k|v_T \varphi} \right| \ll 1, \text{ soit}$$

$$\varphi \gg \left(\frac{\omega_{\text{coll}}}{\omega_H} \right)^{4/3} \frac{1}{(b v \beta_T^2)^{1/3}} \quad (\text{I-23})$$

On peut tenir compte d'une même manière de la variation relativiste de ω_H , ce qui conduit à la condition :

$$\left| \frac{\omega_H \beta_T^2}{\sqrt{2}|k|v_T \varphi} \right| \ll 1, \text{ soit}$$

$$\varphi \gg \frac{1}{(bv)^{1/3}} \beta_T^2 \quad (\text{I-24})$$

En groupant ces différentes conditions, on peut écrire

$$\max \left\{ \left(\frac{\omega_{\text{coll}}}{\omega_H} \right)^{4/3} \frac{1}{(bv\beta_T^2)^{1/3}}, \frac{1}{(bv)^{1/3}} \beta_T^2 \right\} \ll \varphi \ll \frac{1}{(bv)^{1/3}} \beta_T^{2/3} \quad (\text{I-25})$$

En utilisant les valeurs de φ_{min} ainsi indiquées on obtient les expressions suivantes pour l'indice de réfraction maximum

$$|x_{\text{max}}| \sim \left(\frac{b}{v^2 \beta_T} \right)^{1/3} \begin{cases} (\omega_{\text{coll}}/\omega_H)^{2/3}, & \text{par effet collisionnel} \\ \beta_T^{-2/3}, & \text{par effet relativiste} \end{cases} \quad (\text{I-26})$$

$$(\text{I-27})$$

L'inégalité (I-25) montre que ce calcul est valable dans une coquille conique qui prolonge le domaine de validité de l'approximation sans particules résonnantes discutée au début.

Signalons pour finir qu'un calcul ayant le même point de départ que le nôtre a été présenté à la même époque par Canobbio et Croci⁽³¹⁾. Il aboutit à des résultats différents. Nous pensons que la raison en est la suivante : cherchant des solutions à indice élevé $|x| \gg 1$ ces auteurs ont réduit la relation de dispersion à son premier terme ($A = 0$, d'où $\epsilon_{xx} = 0$). Ce procédé se heurte aux mêmes critiques que celui utilisé par Bernstein dans l'approximation décrite au début du chapitre.

Revenant au problème de la génération d'harmoniques par un magnétoplasma chaud, les modes que nous avons trouvés sont moins intéressants, étant fortement amortis, que ceux de Dnestrovskii et Kostomarov . Leur contribution au rayonnement est donc problématique : ils pourraient cependant jouer un rôle dans le cas d'un plasma fini (effets de surface).

DEUXIEME PARTIE

PERTE D'ENERGIE D'UNE PARTICULE TEST DANS UN MAGNETOPLASMA FROID⁽²⁵⁾

Le fait pour un milieu diélectrique d'être à la fois anisotrope et dispersif introduit des aspects nouveaux et intéressants dans le problème de l'échange d'énergie (dû à la réaction du rayonnement) entre une particule test animée d'un mouvement imposé et le milieu. De plus, comme nous le verrons, cette perte d'énergie s'identifie dans le cas d'un magnétoplasma froid avec le rayonnement émis par la particule. Le calcul de cette perte d'énergie ou le calcul direct du rayonnement est assez délicat. Il a été développé par plusieurs auteurs selon des méthodes différentes et nous discuterons de l'une d'entre elles, dite méthode de l'Hamiltonian.

Nous nous proposons d'évaluer la perte d'énergie en calculant $E(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{J}_s(\mathbf{r},t)$ étant le courant dû au mouvement de la particule test et le champ $E(\mathbf{r},t)$ étant calculé au niveau de cette particule. Notre méthode est fondée sur la diagonalisation du tenseur de réponse du milieu. Nous donnerons une expression générale du spectre de fréquence de la perte d'énergie et de son spectre angulaire, grandeurs qui s'identifient dans un sens que nous préciserons avec les spectres correspondants du rayonnement. Nous examinerons aussi le problème controversé des divergences de la perte d'énergie au voisinage des résonances d'indices (phénomène connu sous le nom de "Infinity catastrophe"). Enfin nous envisagerons la répartition de la perte d'énergie en composantes transverse et longitudinale par rapport à la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ d'un mode propagatif quelconque.

II-A - FORMULATION DE LA PERTE D'ENERGIE

Considérons donc une particule test animée d'un mouvement hélicoïdal autour des lignes de force magnétique dans le plasma. Ce mouvement est imposé par un générateur extérieur et par conséquent invariable.

La puissance instantanée perdue par la particule test est donnée par

$$P(t) = E[r_0(t), t] \cdot J_s(t) \quad (II-1)$$

où $r_0(t)$ est le vecteur position de la particule test au temps t et $J_s(t)$ est le courant (source) associé au mouvement : $J_s(t) = ev_0(t)\delta[r-r_0(t)]$. La puissance perdue $P(t)$ sous la forme (II-1) n'est pas définie sans ambiguïté, puisque le champ $E[r_0(t), t]$ produit par la particule test est divergent au niveau de celle-ci. Cette ambiguïté est levée en utilisant la combinaison de la partie avancée et retardée du champ :

$$E[r_0(t), t]_{\text{ret}} = \lim_{r \rightarrow r_0(t)} \left[\frac{1}{2}(E(r, t)_{\text{ret}} + E(r, t)_{\text{av}}) + \frac{1}{2}(E(r, t)_{\text{ret}} - E(r, t)_{\text{av}}) \right] \quad (II-2)$$

Dans cette expression, seul le deuxième terme qui est invariant dans l'opération de renversement de temps contribue à la puissance résistive (20). Il est fini, tandis que le premier terme associé à la renormalisation de la masse électromagnétique est divergent.

Le plasma froid étant caractérisé par un tenseur diélectrique $\epsilon_{ij}(\omega)$, le champ électrique induit par le courant test est déterminé en transformée de Fourier par l'expression :

$$I_{ij}(k, \omega) \cdot E(k, \omega) = -i \frac{4\pi}{\omega} J_{sj}(k, \omega)$$

avec :

(II-3)

$$I_{ij}(k, \omega) = \epsilon_{ij}(\omega) - \frac{c^2}{\omega^2} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j)$$

Les composantes retardée et avancée du champ sont manifestement données par :

$$E(k, t)_{\text{ret}} = - i 4 \pi \int d k \int \frac{d \omega}{\omega} T_{\omega+}^{-1}(k, \omega) \cdot J_{\omega s}(k, \omega) \exp [i(k \cdot r_{\omega} - \omega t)] \quad (\text{II-4})$$

$$E(k, t)_{\text{av}} = - i 4 \pi \int d k \int \frac{d \omega}{\omega} T_{\omega-}^{-1}(k, \omega) \cdot J_{\omega s}(k, \omega) \exp [i(k \cdot r_{\omega} - \omega t)]$$

où $T_{\omega+}^{-1}$ et $T_{\omega-}^{-1}$ sont respectivement les composantes-plus et -moins de la matrice T_{ω}^{-1} . Nous considérons dans ce qui suit un magnétoplasma froid non-collisionnel à deux composantes dont le tenseur diélectrique se met sous la forme :

$$\epsilon_{\omega} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & i \epsilon_2 & 0 \\ -i \epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} = \epsilon_{\omega}^{\dagger}(\omega) \quad (\text{II-5})$$

où :

$$\epsilon_1 = 1 + \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1 - \frac{m_e}{m_i} q^2}{(1-q^2)(1 - \frac{m_e^2}{m_i^2} q^2)}, \quad \epsilon_2 = \frac{c^2}{v_A^2} \frac{\left(1 - \frac{m_e}{m_i}\right) q}{(1-q^2)(1 - \frac{m_e^2}{m_i^2} q^2)}$$

$$\epsilon_3 = 1 - \frac{c^2}{v_A^2} \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{q^2} \quad (\text{II-6})$$

$$q = \frac{\omega}{\Omega_H}, \quad v_A^2 = \frac{B_0^2}{4 \pi n (m_i + m_e)}$$

et $\epsilon^{\dagger}$ désigne l'hermitique conjugué. de ϵ . m_i , m_e et Ω_H sont respectivement les masses protonique, électronique et la fréquence cyclotron protonique. v_A est la vitesse d'Alfvén.

La représentation explicite des $T_{\omega+}$ et $T_{\omega-}$ sera facilement obtenue en les diagonalisant, ce que nous ferons dans la suite. Pour le moment notons que $P(t)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$P(t) = - i 4 \pi \int d k \int \frac{d \omega}{\omega} J_{\omega s}(t) \cdot \frac{1}{2} [T_{\omega+}^{-1}(k, \omega) - T_{\omega-}^{-1}(k, \omega)] \cdot J_{\omega s}(k, \omega) \exp [i(k \cdot r_{\omega}(t) - \omega t)], \quad (\text{II-7})$$

nouvelle définition de $P(t)$ qui remplace (II-1).

D'autre part il est naturel de prendre, d'un point de vue physique, la moyenne de perte d'énergie sur un temps long par rapport à la période de gyration de la particule test. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \overline{P(t)} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt P(t) \\ &= -i4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int dk \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt J_s(t) e^{i[k \cdot r_0(t) - \omega t]} \\ &\quad \cdot \frac{1}{2} \left[T_{\omega+}^{-1}(k, \omega) - T_{\omega-}^{-1}(k, \omega) \right] \cdot J_s(k, \omega) \end{aligned} \quad (II-8)$$

Les vecteurs position et vitesse de la particule test en mouvement hélicoïdal à la fréquence angulaire Ω_H sont donnés par :

$$r_0(t) = (\rho \cos \Omega_H t, \pm \rho \sin \Omega_H t, v_z)$$

et

$$v_0(t) = (-v_{\perp} \sin \Omega_H t, \pm v_{\perp} \cos \Omega_H t, v_z)$$

(II-9)

où

$\rho \left(= \frac{v_{\perp}}{\Omega_H} \right)$ représente le rayon de gyration. $v_{\perp}$ et v_z sont respectivement les composantes de vitesse perpendiculaire et parallèle au champ magnétique extérieur. Les signes plus et moins se réfèrent au signe de charge de la particule test.

En transformée de Fourier, on a

$$J_s(k, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-i)^s e^{\pm i s \varphi} J_s \delta(\omega - s\Omega_H - kv_z \cos \theta) \quad (II-10)$$

avec :

$$J_s = \begin{pmatrix} v_{\perp} \left\{ \frac{s}{\xi} J_s(\xi) \cos \varphi \mp i J'_s(\xi) \sin \varphi \right\} \\ v_{\perp} \left\{ \pm i J'_s(\xi) \cos \varphi + \frac{s}{\xi} J_s(\xi) \sin \varphi \right\} \\ v_z J_s(\xi) \end{pmatrix}$$

$$\xi = kp \sin \theta = \frac{kv_{\perp}}{\Omega_H} \sin \theta$$

$J_s(\xi)$ et $J'_s(\xi)$ sont respectivement la fonction de Bessel du $s^{\text{ième}}$ ordre et sa dérivée première par rapport à son argument ξ .

L'intégrale sur t de (II-8) donne :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt v_{\omega}(t) e^{i[k \cdot r_{\omega_0}(t) - \omega t]} = \sum_{s'=-\infty}^{\infty} i^{s'} e^{i s' \varphi} j_{s'}^* \frac{\sin[(\omega - s' \Omega_H - k v_z \cos \theta) T/2]}{(\omega - s' \Omega_H - k v_z \cos \theta) T/2} \quad (\text{II-11})$$

Portant (II-10) et (II-11) dans (II-8) on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{P(t)} = & -i \frac{e^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int dk \sum_{s,s'} i^{s'} (-i)^s e^{\pm i(s-s')\varphi} j_{s'}^* \\ & \cdot \frac{1}{2} [T_{\nu+}^{-1}(k, \omega) - T_{\nu-}^{-1}(k, \omega)] j_{\nu s} \delta(\omega - s \Omega_H - k v_z \cos \theta) \\ & \cdot \frac{\sin[(\omega - s' \Omega_H - k v_z \cos \theta) T/2]}{(\omega - s' \Omega_H - k v_z \cos \theta) T/2} \end{aligned}$$

Dans la limite $\Omega_H T \rightarrow \infty$, seul le terme $s=s'$ subsiste : on a en effet la limite

$$\lim_{\Omega_H T/2 \rightarrow \infty} \frac{\sin[(s-s') \Omega_H T/2]}{(s-s') \Omega_H T/2} = \delta_{ss'}$$

d'où il résulte l'expression finale de $\overline{P(t)}$:

$$\overline{P(t)} = -i \frac{e^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int dk \sum_{s=-\infty}^{\infty} j_{\nu s}^* \cdot \frac{1}{2} [T_{\nu+}^{-1}(k, \omega) - T_{\nu-}^{-1}(k, \omega)] \cdot j_{\nu s} \delta(\omega - s \Omega_H - k v_z \cos \theta) \quad (\text{II-12})$$

Nous allons maintenant diagonaliser $T_{\nu\pm}^{-1}(k, \omega)$. Nous notons d'abord la simplification suivante : l'intégration sur l'angle polaire φ associé au vecteur d'onde k est immédiate. On a :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi j_{\nu s}^*(\varphi) \cdot T_{\nu\pm}^{-1}(\varphi) \cdot j_{\nu s}(\varphi) = j_{\nu s}^*(\varphi=0) \cdot T_{\nu\pm}^{-1}(\varphi=0) \cdot j_{\nu s}(\varphi=0) \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (\text{II-13})$$

Ceci nous permet de considérer seulement $T_{\nu\pm}^{-1}(\varphi=0)$ et $j_{\nu s}(\varphi=0)$ dans la suite.

Soit maintenant U_{λ} la matrice unitaire diagonalisant T_{λ}^{-1} . On a :

$$(U_{\lambda}^{-1} T_{\lambda}^{-1} U_{\lambda})_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda^{(v)}} \delta_{\mu\nu}$$

$\lambda^{(v)}$ étant une des valeurs propres de T_{λ} . Le tenseur ϵ_{λ} étant hermétique, T_{λ}^{-1} l'est également. Donc ses valeurs propres sont réelles. Cependant les valeurs propres de $T_{\lambda+}^{-1}$ et $T_{\lambda-}^{-1}$ sont respectivement $\lambda^{-1}(\omega+i\sigma)$ et $\lambda^{-1}(\omega-i\sigma)$, où σ est un réel positif qu'on fera tendre vers zéro et dont la présence dans l'argument de $\lambda^{(v)}$ assure le caractère -plus ou -moins de la matrice considérée. Soit $\alpha_{\mu}^{(v)}$ le vecteur propre normalisé correspondant à la $v^{\text{ième}}$ valeur propre $\lambda^{(v)}$; alors on a :

$$U_{\mu\nu} = \alpha_{\mu}^{(v)} \quad (\text{II-14})$$

d'où

$$j_{\lambda s}^* T_{\lambda \pm}^{-1} j_{\lambda s} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{\mu} \frac{1}{\lambda^{(\mu)}(\omega \pm i\sigma)} |j_{\lambda s}^* \alpha^{(\mu)}|^2 \quad (\text{II-15})$$

On voit donc, en se reportant à l'expression (II-12) de la quantité réelle de $\overline{P(t)}$, que les seules contributions non-nulles de l'intégrant se trouvent au voisinage des pôles de T_{λ}^{-1} , c'est-à-dire, des zéros de $\lambda^{(\mu)}$. $\lambda^{(\mu)}=0$ fournit alors une relation entre l'indice de réfraction ϵ , ω , et θ : $\det T_{\lambda}(\epsilon, \omega, \theta) = 0$, qui est évidemment la relation de dispersion.

On est donc amené à développer $\frac{1}{\lambda^{(\mu)}(\omega \pm i\sigma)}$ au voisinage des solutions $\epsilon = \epsilon_1(\omega, \theta)$, de la relation de dispersion, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_+^{(\mu)}} - \frac{1}{\lambda_-^{(\mu)}} &= \lim_{\sigma' \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\lambda^{(\mu)}(\omega^2 - \epsilon_1^2 - i\sigma')} - \frac{1}{\lambda^{(\mu)}(\omega^2 - \epsilon_1^2 + i\sigma')} \right] \\ &= \lim_{\sigma' \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\omega^2 - \epsilon_1^2 - i\sigma'} - \frac{1}{\omega^2 - \epsilon_1^2 + i\sigma'} \right\} \left(\frac{\partial \lambda^{(\mu)}}{\partial \omega^2} \right)^{-1}_{\epsilon_1^2} \\ &= i2\pi \delta(\omega^2 - \epsilon_1^2) \left(\frac{\partial \lambda^{(\mu)}}{\partial \omega^2} \right)^{-1}_{\epsilon_1^2} \\ &= i\pi \frac{\delta(\omega - \epsilon_1) + \delta(\omega + \epsilon_1)}{|\epsilon_1|} \left(\frac{\partial \lambda^{(\mu)}}{\partial \omega^2} \right)^{-1}_{\epsilon_1^2} \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

On obtient alors :

$$j_{\alpha s}^* \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda_+} - \frac{1}{\lambda_-} \right] \cdot j_{\alpha s} = \frac{i}{2} \sum_{\mu} \left[\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_+^{(\mu)}} - \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_-^{(\mu)}} \right] |j_{\alpha s}^* \cdot \alpha^{(\mu)}|^2$$

$$= i \frac{\pi}{2} \sum_{\mu} \sum_{i\mu} \frac{\delta(\omega - \omega_{i1}) + \delta(\omega + \omega_{i1})}{|\omega_{i1}|} \left(\frac{\partial \lambda^{(\mu)}}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_{i1}^2}^{-1} |j_{\alpha s}^* \cdot \alpha^{(\mu)}|^2 \quad (\text{II-17})$$

Notons que dans l'analyse de Pistunovitch et Schafranov⁽²²⁾ il manque le terme $\left(\frac{\partial \lambda^{(\mu)}}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_{i1}^2}^{-1}$.

Nous intégrons maintenant par rapport aux variables ω, θ et ω avec $d\mathbf{k} = d\Omega d|\mathbf{k}|k^2 = d\Omega \frac{\omega^3}{c^3} \omega^2 d\omega$ et on obtient

$$\overline{P(t)} = \frac{e^3}{4\pi c^3 i\mu} \sum_{\mu} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int d\Omega \left\{ \int_{-\infty}^0 d\omega \omega^2 \int_{-\infty}^0 d\omega \frac{\omega^2}{|\omega_{i1}|} \delta(\omega + \omega_{i1}) \left(\frac{\partial \lambda^{(\mu)}}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_{i1}^2}^{-1} |j_{\alpha s}^* \cdot \alpha^{(\mu)}|^2 \delta(\omega - s\Omega_H - \omega \omega_{i1} \beta_z \cos \theta) \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega^2}{|\omega_{i1}|} \delta(\omega - \omega_{i1}) \left(\frac{\partial \lambda^{(\mu)}}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_{i1}^2}^{-1} |j_{\alpha s}^* \cdot \alpha^{(\mu)}|^2 \delta(\omega - s\Omega_H - \omega \omega_{i1} \beta_z \cos \theta) \right\}$$

où $\beta_z = \frac{v_z}{c}$ et $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$.

La relation de dispersion, dans le cas d'un magnétoplasma froid, a au plus deux solutions réelles $\omega = \omega_{i1}(\omega, \theta)$. Et en supposant qu'il n'existe pas de racines doubles pour $\lambda^{(\mu)}$ (à savoir, deux des trois $\lambda^{(\mu)}$ ne s'annulent pas simultanément pour $\omega_{i1}(\omega, \theta)$ donné), on peut éliminer la somme sur μ et on aboutit à l'expression :

$$\overline{P(t)} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \sum_i \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \left\{ |\omega_{i1}| \left(\frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_{i1}^2}^{-1} |j_{\alpha s}^* \cdot \alpha^{(i)}|^2 \delta(\omega - s\Omega_H - \omega_{i1} \omega \beta_z \cos \theta) \right.$$

$$\left. + (\omega \rightarrow -\omega, \omega_{i1} \rightarrow -\omega_{i1}) \right\} \quad (\text{II-18})$$

Il reste à déterminer les vecteurs propres $\alpha^{(i)}$ correspondant aux valeurs propres nulles $\lambda^{(i)}$ ainsi que le facteur $\left(\frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_{i1}^2}$. Ceci est fait

dans l'appendice A. On obtient $\alpha^{(i)}$ sous la forme :

$$\alpha^{(i)} = \frac{1}{(1 + \gamma_i^2 + \delta_i^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} \gamma_i \\ -i \\ \delta_i \end{pmatrix} \quad (\text{II-19})$$

où γ_i et δ_i , taux de polarisation, sont définis par les relations :

$$\gamma_i \equiv \frac{E_x}{i E_y} = \frac{\omega_i^2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (\text{II-20})$$

$$\delta_i \equiv \frac{E_z}{i E_y} = \gamma_i \frac{\omega_i^2 \sin\theta \cos\theta}{\omega_i^2 \sin^2\theta - \epsilon_3}$$

D'autre part

$$\left(\frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_i^2} = \left[\frac{1}{p_1} \frac{\partial |\lambda|}{\partial \omega^2} \right]_{\omega_i^2}$$

avec :

$$p_1 \omega_i^2 = \omega_i^4 - \{(2 + \sin^2\theta)\epsilon_1 + (1 + \cos^2\theta)\epsilon_3\} \omega_i^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 + 2\epsilon_1\epsilon_3$$

$$\left[\frac{\partial |\lambda|}{\partial \omega^2} \right]_{\omega_i^2} = 2(\epsilon_1 \sin^2\theta + \epsilon_3 \cos^2\theta) \omega_i^2 - \{(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \sin^2\theta + \epsilon_1\epsilon_3 (1 + \cos^2\theta)\}$$

Notons que dans l'expression (II-18) on est amené à l'intégrale sur les fréquences positives. On peut s'en convaincre en remarquant que le changement de variables simultané $\omega \rightarrow -\omega$, $\omega_i \rightarrow -\omega_i$, $s \rightarrow -s$ et $\theta \rightarrow \pi - \theta$ transforment la deuxième intégrale en la première.

En intégrant l'expression (II-18) sur ω à l'aide de la formule :

$$\delta[f(x)] = \frac{\delta(x-x_0)}{\left| \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0} \right|}, \text{ où } x_0 \text{ est une des solutions de l'équation } f(x)=0, \text{ on}$$

obtient la formule sur la distribution angulaire de la perte d'énergie :

$$\Pi(\theta) \equiv \frac{d}{d\Omega} \overline{P(t)} = \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \sum_{i=1}^2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_i^2 \tilde{\omega}_i \tilde{G}_i}{q} \frac{\left[\beta_{\perp} \left\{ \frac{s \tilde{\gamma}_i}{\tilde{\xi}_i} J_s(\tilde{\xi}_i) \mp J'_s(\tilde{\xi}_i) \right\} + \beta_z \delta_i J_s(\tilde{\xi}_i) \right]^2}{\left| 1 - \beta_z \cos \theta \left[\frac{\partial}{\partial q} (\omega_i q) \right]_{\tilde{\omega}_i} \right|} \quad (\text{II-22})$$

Le tilde sur une grandeur quelconque désigne la valeur de cette grandeur pour ω , solution de la relation de Cerenkov $[\omega = \omega(\theta)$, fréquence dite "cohérente"] :

$$\omega - s \Omega_H - \omega_i(\omega, \theta) \beta_z \cos \theta = 0 \quad (\text{II-23})$$

Enfin l'expression du spectre de fréquence s'obtient en intégrant par rapport à θ , ce qui conduit à la formule :

$$\Pi(\omega) \equiv \frac{d}{d\omega} \overline{P(t)} = \frac{e^2}{c} \sum_{i=1}^2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\omega}_i \overline{\gamma}_i \overline{G}_i}{\beta_z \left| \overline{\omega}_i + \cos \theta \left(\frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \cos \theta} \right)_{\overline{\theta}} \right|} \frac{\left[\beta_{\perp} \left\{ \frac{s \overline{\gamma}_i}{\overline{\xi}_i} J_s(\overline{\xi}_i) \mp J'_s(\overline{\xi}_i) \right\} + \beta_z \delta_i J_s(\overline{\xi}_i) \right]^2}{\quad} \quad (\text{II-24})$$

où, bien entendu, les grandeurs barrées sont évaluées avec $\theta = \overline{\theta}(\omega)$, solution de la condition Cerenkov (II-23). Dans ces deux expressions, le facteur G_i est défini par

$$G_i = \frac{1}{1 + \gamma_i^2 + \delta_i^2} \left[\frac{1}{P_1} \frac{\partial |\tilde{\gamma}|}{\partial \omega^2} \right]_{\tilde{\omega}_i}^{-1}$$

Il est important de démontrer la négativité des composantes de ces deux spectres dans une gamme de fréquences considérée, une fois qu'on spécifie un mode. Elle résulte de la négativité de $\tilde{G}_i$ et $\overline{G}_i$, et celle-ci est établie dans l'appendice B.

Dans les formules précédentes ω et ω sont définis positifs, tandis que s et $\cos \theta$ sont de signe quelconque. $\cos \theta < 0$ et $\cos \theta > 0$ représentent respectivement l'émission en arrière et en avant. D'autre part, les valeurs posi-

tives et négatives de s ne fournissent pas de contribution symétrique. En utilisant la terminologie habituelle on appellera émission normale et anormale les émissions correspondant à s positif et s négatif. Cette terminologie est en tout cas justifiée par le fait que les composantes s négatifs ne contribuent pas au rayonnement cyclotron dans le vide.

Toutes les combinaisons de signe de s et de $\cos\theta$ ne sont pas physiquement réalisables. C'est-à-dire qu'elles ne peuvent pas toujours satisfaire simultanément à l'équation de dispersion et à la condition Cerenkov. Les combinaisons possibles sont les suivantes :

- (i) $s > 0$, $\cos\theta > 0$: rayonnement cyclotron-Cerenkov normal émis en avant
- (ii) $s > 0$, $\cos\theta < 0$: rayonnement cyclotron-Cerenkov normal émis en arrière
- (iii) $s = 0$, $\cos\theta > 0$: rayonnement Cerenkov émis en avant
- (iv) $s < 0$, $\cos\theta > 0$: rayonnement cyclotron-Cerenkov anormal émis en avant.

Signalons que tous ces rayonnements ne peuvent pas être émis sur tous les modes.

Dans le domaine de basses fréquences il existe deux modes, ordinaire (ou torsionnel d'après la nomenclature de Stix⁽³⁵⁾) et extraordinaire (ou compressionnel d'après le même auteur). Le premier existe dans la gamme : $0 \leq \omega < \Omega_H$ alors que le second existe dans le domaine : $0 \leq \omega < \omega_H$ (fréquence cyclotron électronique).

Sur les figures 4 nous avons représenté la courbe de dispersion de chacun des deux modes et les "courbes de Cerenkov" définies par (II-23), les points d'intersection de ces courbes donnant les fréquences "cohérentes" qui contribuent à l'expression de la perte d'énergie. Comme l'indice de réfraction dépend seulement de $\cos^2\theta$ (donc invariant par changement $\theta \rightarrow \pi - \theta$), nous avons tracé sur un même diagramme les deux courbes de Cerenkov correspondant à θ et $\pi - \theta$ et l'unique courbe de dispersion associée.

On obtient ainsi les points d'intersection qui représentent respectivement le rayonnement en avant et le rayonnement en arrière. Pour un $|s|$ donné ($s \neq 0$) il y a quatre fréquences cohérentes sur le mode extraordinaire. En revanche sur le mode ordinaire il n'en existe que deux.

Examinons maintenant comment sont reliés la perte d'énergie et le rayonnement de la particule test. En premier lieu notre calcul montre que l'énergie perdue est totalement rayonnée. En effet, partant de l'expression (II-12) pour la quantité réelle $\overline{P}(t)$ on a vu que, du fait de l'hermiticité de $T_{\kappa}^{-1}(\kappa, \omega)$ pour un magnétoplasma froid, les seules contributions à l'intégrale (II-12) reviennent des nombres d'onde κ qui satisfont à la relation de dispersion. En d'autre terme seuls les modes propagatifs, donc rayonnés, contribuent à la perte d'énergie. Pour la même raison il est raisonnable de penser que le spectre de fréquence $\Pi(\omega)$ s'identifie avec le spectre du rayonnement comme c'est le cas dans le vide. Rappelons en effet que $\Pi(\omega)$ représente, sur une fréquence ω donnée, la somme des puissances dissipées sur les différents modes, $|\kappa|$ et θ étant fixés pour cette valeur de ω par la relation de dispersion et par la condition Cerenkov^(*). Quant à la distribution angulaire $\Pi(\theta)$, qui est classiquement calculée dans la littérature elle représente la puissance dissipée sur les modes dont le vecteur d'onde κ fait un angle θ avec la direction du champ magnétique B_0 . Il est clair que $\Pi(\theta)$ ne peut être identifié avec la distribution angulaire de rayonnement $I(\theta)$. En effet, le vecteur d'onde κ d'angle polaire θ étant donné, l'énergie est propagée dans la direction θ_g de la vitesse de groupe $\frac{d\omega}{d\kappa}$, direction différente de la précédente dans un milieu anisotrope. Il serait facile de passer de la distribution $\Pi(\theta)$ à celle $I(\theta_g)$, θ_g étant obtenu par la relation de dispersion et par conséquent le Jacobien de la transformation $\frac{\partial \theta}{\partial \theta_g}$ étant également connu.

(*) En réalité en certains régimes du diagramme de dispersion, on peut trouver plusieurs valeurs de θ correspondant à un ω donné, ce qui n'est pas gênant. En revanche, il correspond un seul ω à un θ fixé, ce qui permet d'assigner une seule vitesse de groupe à chaque θ .

II-B - PERTE D'ENERGIE AU VOISINAGE DES RESONANCES D'INDICES

On a, jusqu'à maintenant, soutenu^(e.g.36,37) que la perte d'énergie en hautes fréquences et sur chaque numéro d'harmonique s divergeait au voisinage des résonances d'indices (phénomène connu sous le nom de "Infinity catastrophe"). Notons tout de suite que les résonances d'indices dangereuses sont seulement celles qui correspondent à des modes de propagation perpendiculaire. En effet les fréquences utiles qui interviennent dans le calcul de la perte d'énergie sont les solutions non seulement de l'équation de dispersion mais aussi de la relation Cerenkov et il est facile de voir que cette dernière limite toujours les valeurs de l'indice à des valeurs finies pour des propagations non perpendiculaires (Fig. 4). On en concluait donc qu'en propagation perpendiculaire, la perte d'énergie pouvait être bornée par un effet collisionnel ou relativiste qui limiterait l'indice. Nous arrivons, quant à nous, à un résultat opposé⁽²⁵⁾ dans la gamme des fréquences $\omega < \omega_0$, la perte d'énergie est intégrable au voisinage des résonances aussi bien pour le mode extraordinaire que pour le mode ordinaire. Ce désaccord entre nos résultats et les résultats antérieurs provient évidemment de la méthode de calcul utilisée (entre autre, méthode de l'Hamiltonien).

Nous examinerons successivement les deux modes, extraordinaire et ordinaire.

1/- Mode extraordinaire -

Comme on peut le voir sur la figure 4, seul le rayonnement en avant donnera lieu à la résonance (point 2 sur la figure 4 a, point 8 sur la figure 4 c et point 6 sur la figure 4 d). En ces points l'indice $\bar{x}_x$ (indice du mode à la fréquence ω , solution de la relation Cerenkov) devient infini quand $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

L'intensité spectrale associée à ce mode et pour le $s^{\text{ième}}$ harmonique (la fréquence cohérente ω étant décalée par effet Doppler vers ω_*) est obtenue à partir de la formule (II-24) :

$$\overline{P}_s(t) = \frac{q^2}{2c} \int_0^\infty d\omega^2 \frac{|\bar{x}_x(\omega, \theta)|}{1 + \bar{\gamma}_x^2 + \bar{\delta}_x^2} \frac{1}{\left[\frac{1}{P_1} \frac{\partial |\bar{T}|}{\partial x^2} \right]_{\bar{x}_x^2}} \frac{\left[\beta_\perp \left\{ \frac{s\bar{\gamma}_x}{\bar{\xi}} J_s(\bar{\xi}) + J'_s(\bar{\xi}) \right\} + \beta_z \bar{\delta}_x J_s(\bar{\xi}) \right]^2}{\beta_z \left| \bar{x}_x(\omega, \theta) + \cos\theta \left(\frac{\partial \bar{x}_x}{\partial \cos\theta} \right) \right|_{\theta}} \quad (\text{II-26})$$

D'autre part, à partir de l'équation de dispersion

$$A \bar{x}_x^4 - B \bar{x}_x^2 + C = 0$$

avec

(II-27)

$$A = \epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta, \quad B = (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \sin^2 \theta + \epsilon_1 \epsilon_3 (1 + \cos^2 \theta)$$

$$\text{et } C = \epsilon_3 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)$$

on obtient, à la limite $\omega \rightarrow \omega_*$, la relation

$$\bar{x}_x^2 \cong \frac{B}{A}, \quad (\text{II-28})$$

où la fréquence de résonance ω_* est la solution de l'équation $A(\cos \theta = 0) = \epsilon_1 = 0$. En couplant cette relation avec la condition Cerenkov (II-23) et en remarquant qu'à la résonance $\epsilon_1 \rightarrow 0$ et $\cos \bar{\theta} \rightarrow 0$ simultanément, $\bar{x}_x^2$ devient

$$\bar{x}_x^2 = - \frac{W}{\epsilon_1} \quad (\text{II-29})$$

où :

$$W = \epsilon_2^2 + \frac{\epsilon_3}{\beta_z} \left(1 - \frac{s \Omega_H}{\omega} \right)^2, \text{ ce qui implique que}$$

$$\epsilon_1 = -\beta_z^2 \cos^2 \bar{\theta} \frac{W}{\left(1 - \frac{s \Omega_H}{\omega} \right)^2}$$

On observe que pour que ϵ_1 soit positif à la limite $\omega \rightarrow \omega_*$, W doit être négatif. D'autre part,

$$\lim_{\bar{x}_x \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial |T|}{\partial x^2} \right)_{\bar{x}_x^2} = -\epsilon_2^2$$

et

$$\lim_{\bar{x}_x \rightarrow \infty} (p_1)_{\bar{x}_x^2} = \bar{x}_x^4$$

Par ailleurs, puisque $\left(\frac{\partial \bar{x}_x}{\partial \cos \theta}\right) \approx \left(\frac{\partial}{\partial \cos \theta} \sqrt{\frac{B}{A}}\right) \approx -\frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{B} \bar{x}_x^3 \cos \bar{\theta}$, on a

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_*} F = \frac{\beta \bar{x}_x}{\epsilon_2^2} |W|$$

où F désigne le dénominateur de (II-26). Les taux de polarisation sont respectivement :

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_*} \bar{\gamma}_x = \frac{\bar{x}_x^2}{\epsilon_2}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_*} \bar{\delta}_x = \bar{\gamma}_x \cot \bar{\theta}$$

On obtient alors :

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_*} \alpha_x = \sin \bar{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \frac{\epsilon_2}{\bar{x}_x^2} \\ \cot \bar{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \bar{\theta} \\ 0 \\ \cos \bar{\theta} \end{pmatrix} = \kappa$$

Ce résultat montre le fait bien connu que la polarisation devient longitudinale à la résonance.

Les expressions asymptotiques de la transformée de Fourier du courant de source s'obtiennent facilement en utilisant le développement asymptotique de la fonction de Bessel :

$$\lim_{\bar{x}_x \rightarrow \infty} J_s(\bar{\xi}_x) = \left(\frac{2}{\pi \bar{\xi}_x}\right)^{1/2} \cos \bar{\chi}$$

$$\lim_{\bar{x}_x \rightarrow \infty} J'_s(\bar{\xi}_x) = -\left(\frac{2}{\pi \bar{\xi}_x}\right)^{1/2} \sin \bar{\chi}$$

où

$$\bar{\xi}_x = \bar{x}_x \frac{\omega}{\Omega_H} \beta_{\perp} \sin \theta, \quad \bar{\chi} = \bar{x}_x - \frac{\pi}{4} (2s+1)$$

Alors

$$\lim_{\bar{x}_x \rightarrow \infty} \frac{1}{c^2} |j_{\nu s}^* \cdot \alpha_x|^2 = \frac{2}{\pi} \frac{\Omega_H}{\omega} \frac{1}{\beta_{\perp} \bar{x}_x^3} \cos^2 \bar{\chi}$$

Le passage à la dernière ligne est valable seulement si on exclut les angles $\bar{\chi}$ tel que $\bar{\chi} \neq \frac{\pi}{2} (2p+1)$, où p est un nombre entier. Si l'on enlève cette limitation, il apparaît un terme de correction, dû à la composante α_y , qui est de l'ordre de $\beta_{\perp}^2 \frac{\epsilon_2}{x_x} \frac{\Omega_H}{\omega_*} \frac{1}{\beta_{\perp} x_x^3} \sin^2 \bar{\chi}$. On le néglige dans la suite. Quant au terme $\cos^2 \bar{\chi}$, nous le remplaçons par 1/2 en prenant la moyenne sur le domaine entier d'intégration.

Portant ces expressions asymptotiques dans (II-26) on peut évaluer la contribution à l'intégrale qui provient des fréquences au voisinage de ω :

$$-\frac{2c}{\epsilon} \overline{P(t)} = \int d\omega^2 \frac{1}{\pi} \frac{1}{\beta_{\perp} \beta_z} \frac{\Omega_H}{\omega} \frac{1}{|W|} \frac{1}{x_x} = \frac{1}{\pi} \int d\omega^2 \frac{\Omega_H}{\omega} \frac{1}{\beta_{\perp} \beta_z} \frac{1}{\epsilon_1^{1/2}} |W|^{1/2} \quad (\text{II-30})$$

Dans le domaine d'intégrale considéré $\epsilon_1(\omega)$ a un zéro simple et peut être développé comme :

$$\epsilon_1(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_*^2) \left(\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_*^2}$$

L'intégrale (II-30) donne alors :

$$-\overline{P_s(t)} = \text{const} \int \frac{dx}{(x-1)^{1/2}} = \text{const} \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^{1/2} = 0 \quad (\text{II-31})$$

où $x = \frac{\omega^2}{\omega_*^2}$. On peut donc conclure qu'en dépit de la divergence de la densité spectrale en $\omega \rightarrow \omega_*$, cette densité est intégrable et la contribution à la perte d'énergie totale au voisinage de ω_* est nulle.

2/- Mode ordinaire-

Sur la figure 4, on constate que seul le rayonnement normal émis en arrière donne une résonance. Encore une fois $\bar{x}_0 \rightarrow \infty$ lorsque $\bar{\theta} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, où, bien entendu, $\bar{x}_0$ est l'indice du mode ordinaire évalué à la fréquence ω . De plus $\omega_* \rightarrow 0$. Montrons rapidement ceci : l'indice de réfraction du mode ordinaire x_0 est donné par :

$$x_0^2 = \frac{2}{\beta_A} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta - 2 \frac{m_e}{m_i} q^2 - \left\{ \sin^4 \theta + 4 \left(1 - 2 \frac{m_e}{m_i} \right) q^2 \cos^2 \theta \right\}^{1/2}} \quad (\text{II-32})$$

avec $q = \frac{\omega}{\Omega_H} (\leq 1)$.

Le dénominateur s'annule à la fréquence $q=q_0 = \frac{|\cos\theta|}{(\cos^2\theta + \frac{m_e}{m_i} \sin^2\theta)^{1/2}}$, et en fonction de q_0 , l'expression de x_0 peut se récrire :

$$x_0^2 \approx \frac{1}{2\beta_A^2} \frac{1 + \cos^2\theta + \sqrt{\sin^4\theta + 4q^2 \cos^2\theta}}{\left(1 - \frac{q^2}{2}\right) \cos^2\theta} \quad (\text{II-33})$$

En couplant (II-33) avec (II-23), on obtient la fréquence cohérente sous la forme :

$$q = q_0 (1 - \bar{\Delta}_s)$$

$$\text{où, à la limite } \cos^2\bar{\theta} \rightarrow 0, \quad \bar{\Delta}_s = \frac{\beta_z^2}{2\beta_A^2} \frac{m_i}{m_e} \frac{\cos^2\bar{\theta}}{(s - q_0)^2} \quad (\text{II-34})$$

On voit alors que

$$\lim_{\cos^2\bar{\theta} \rightarrow 0} q_0 = \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} |\cos\bar{\theta}| \rightarrow 0$$

D'autre part les éléments du tenseur diélectrique prennent la forme :

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \epsilon_1 = 1 + \frac{1}{\beta_A^2} > 0$$

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \epsilon_2 = 0$$

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \epsilon_3 = -\frac{1}{\beta_A^2} \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{q^2} \rightarrow -\infty$$

Comme dans le cas précédent, l'expression de $\bar{x}_0$ peut être facilement obtenue à partir de (II-27) et (II-28) et compte tenu de la condition Cerenkov (II-23):

$$\bar{x}_0^2 \approx \frac{1}{(\beta_z \beta_A)^2} \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{\epsilon_1} \frac{s^2}{q^4}$$

Par ailleurs

$$\lim_{\bar{x}_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_0^2} \left| \frac{\bar{T}}{\bar{\omega}} \right| \right) = + \epsilon_1 \epsilon_3$$

$$\lim_{\bar{x}_0 \rightarrow \infty} (p_1)_{\bar{x}_0^2} = \bar{x}_0^4$$

Le calcul du terme $\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \cos \bar{\theta}}$ est un peu plus compliqué dans ce cas, en raison de la divergence de ϵ_3 à la limite $\omega \rightarrow 0$. Après quelques lignes d'algèbre on obtient pour $\bar{F}$:

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \bar{F} = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\beta_z}{\epsilon_1} \bar{x}_0^3 \cos^2 \bar{\theta} = \bar{x}_0^2 s \frac{\beta_A}{\epsilon_1^{1/2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}$$

Les facteurs de polarisation sont maintenant

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \bar{\gamma}_0 = \frac{\bar{x}_0^2}{\epsilon_2}$$

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \bar{\delta}_0 = \bar{\gamma}_0 \cot \bar{\theta}$$

Comme pour le mode extraordinaire on obtient donc

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \bar{\alpha}_0 = \sin \bar{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \frac{\epsilon_2}{\bar{x}_0^2} \\ \cot \bar{\theta} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \sin \bar{\theta} \\ 0 \\ \cos \bar{\theta} \end{pmatrix} = \kappa$$

ce qui montre comme précédemment que la polarisation est longitudinale.

Puisque $\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \bar{\xi}_0 = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \bar{x}_0 \frac{\omega_0}{\Omega_H} \beta \sin \bar{\theta} \rightarrow \infty$, le développement asymptotique de la fonction de Bessel est valable. L'expression pour $|j_{\kappa_s}^* \bar{\alpha}_0|$ est identique à celle du cas précédent. Au voisinage de $\bar{\omega} = \omega_0 = 0$, on arrive donc à l'intégrale :

$$- \bar{P}_s(t) = \text{const} \int dy \frac{\sqrt{y}}{1-y} = 0$$

(II-35)

où :

$$y = \beta_A^2 \frac{m_e}{m_i} q^2$$

On voit donc que, pour le mode ordinaire, non seulement la densité spectrale mais la contribution à la perte d'énergie totale s'annulent au voisinage des résonances.

Nous complétons ces résultats dans la partie suivante en examinant la somme des contributions de toutes les valeurs de s à la perte d'énergie et nous montrerons que la somme correspondant au mode extraordinaire est convergente alors que la somme sur le mode ordinaire est divergente.

II-C - COMPOSANTES LONGITUDINALE ET TRANSVERSE DE LA PERTE D'ENERGIE

Nous allons considérer pour chaque mode de propagation, extraordinaire ou ordinaire, de vecteur d'onde k les contributions transverse et longitudinale (relativement à k) de ce mode à la perte d'énergie. Le champ retardé s'écrit dans la représentation diagonale de T :

$$E(k, \omega)_{\text{ret}} = -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\mu} \left(\frac{1}{\lambda(\mu)} \right) \alpha^{(\mu)} \alpha^{(\mu)*} \cdot J_S(k, \omega) \quad (\text{II-36})$$

d'où les composantes transverse et longitudinale :

$$\left. \begin{aligned} E(k, \omega)_{\text{ret}}^T &= -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\mu} \left(\frac{1}{\lambda(\mu)} \right) \alpha^{(\mu)T} \alpha^{(\mu)*} \cdot J_S(k, \omega) \\ E(k, \omega)_{\text{ret}}^L &= -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\mu} \left(\frac{1}{\lambda(\mu)} \right) \alpha^{(\mu)L} \alpha^{(\mu)*} \cdot J_S(k, \omega) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-37})$$

où $\alpha^{(\mu)L} = \kappa \kappa^* \alpha^{(\mu)}$ et $\alpha^{(\mu)T} = (1 - \kappa \kappa^*) \alpha^{(\mu)}$ avec $\kappa = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$.

En mettant en évidence cette décomposition, la perte d'énergie s'écrit :

$$\overline{P(t)} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \sum_{i, \mu} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \left[|\alpha_i| \left(\frac{\partial \lambda^{(\mu)}}{\partial \omega^2} \right)^{-1} \left\{ j_s^* \cdot \alpha^{(\mu)T} + j_s^* \cdot \alpha^{(\mu)L} \right\} \left(\alpha^{(\mu)*} \cdot j_s \right) \delta(\omega - s\Omega_H - \alpha_i \omega \beta_z \cos \theta) + (\omega \rightarrow -\omega, \alpha_i \rightarrow -\alpha_i) \right] \quad (II-38)$$

où, après quelques lignes d'algèbre, on a

$$\alpha^{(\mu)T} = \frac{1}{[1 + \gamma^{(\mu)^2} + \delta^{(\mu)^2}]^{1/2}} \begin{pmatrix} \cos \theta (\gamma^{(\mu)} \cos \theta - \delta^{(\mu)} \sin \theta) \\ -1 \\ -\sin \theta (\gamma^{(\mu)} \cos \theta - \delta^{(\mu)} \sin \theta) \end{pmatrix} \quad (II-39)$$

et

$$\alpha^{(\mu)L} = \frac{\gamma^{(\mu)} \sin \theta + \delta^{(\mu)} \cos \theta}{[1 + \gamma^{(\mu)^2} + \delta^{(\mu)^2}]^{1/2}} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions le rapport Γ_s^T de la perte d'énergie transverse à la perte d'énergie totale pour un mode de propagation donné et pour un numéro d'harmonique s fixé a pour expression :

$$\Gamma_s^T = \frac{j_s^*(\xi_i) \cdot \alpha^{(\mu)T}}{j_s^*(\xi_i) \cdot \alpha^{(\mu)}} = \frac{\gamma \epsilon_3 \left(\frac{s}{q} - \sin^2 \theta \right) J_s(\xi_i) + (\epsilon_3 - \alpha_i^2 \sin^2 \theta) \alpha_i \beta_{\perp} \sin \theta J'_s(\xi_i)}{\gamma \left(\frac{s}{q} - \epsilon_3 - \alpha_i^2 \sin^2 \theta \right) J_s(\xi_i) + (\epsilon_3 - \alpha_i^2 \sin^2 \theta) \alpha_i \beta_{\perp} \sin \theta J'_s(\xi_i)} \quad (II-40)$$

De même le coefficient longitudinal est :

$$\Gamma_s^L = \frac{j_s^*(\xi_i) \cdot \alpha^{(\mu)L}}{j_s^*(\xi_i) \cdot \alpha^{(\mu)}} = \frac{\gamma (\epsilon_3 - \alpha_i^2) \sin^2 \theta J_s(\xi_i)}{\gamma \left(\frac{s}{q} - \epsilon_3 - \alpha_i^2 \sin^2 \theta \right) J_s(\xi_i) + (\epsilon_3 - \alpha_i^2 \sin^2 \theta) \alpha_i \beta_{\perp} \sin \theta J'_s(\xi_i)} \quad (II-41)$$

Remarquons que, bien que la perte d'énergie totale soit évidemment positive ($-\overline{P(t)} > 0$), il n'en est pas nécessairement le même pour chacune des contributions longitudinale et transverse. La signification physique d'une différence de signe entre les deux composantes de la perte d'énergie n'étant pas pour l'instant parfaitement claire, nous nous bornerons ici d'indiquer quels sont les signes trouvés dans les deux limites $\theta \rightarrow 0$ et $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (pour des modes du numéro d'harmonique $s \geq 1$).

Mode extraordinaire

a/ $\theta \rightarrow 0$: En propagation parallèle au champ magnétique extérieur, le mode extraordinaire est de polarisation transverse et droite. Par conséquent seuls les ions négatifs [signe supérieur dans (II-40) et (II-41)] peuvent tomber en résonance sur ce mode et fournir toute leur énergie sur la composante transverse, à savoir $\Gamma_s^T=1$ et $\Gamma_s^L=0$. Les ions positifs, eux, divisent leur perte d'énergie sur les composantes longitudinale et transverse selon les formules suivantes :

$$\Gamma_s^T = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \frac{2\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \frac{q}{s}}{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - 2\epsilon_2 \frac{q}{s}}$$

$$\Gamma_s^L = - \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) \frac{q}{s}}{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - 2\epsilon_2 \frac{q}{s}}$$

b/ $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Pour un numéro d'harmonique borné supérieurement par $s \ll \left[\left(\frac{\beta_{\perp}}{\beta_A} \right)^2 + \frac{m_e}{m_i} \right]^{-1/2}$, condition équivalente à $s \ll \frac{\omega_*}{\Omega_H}$ (où ω_* est la fréquence hybride basse), on trouve :

$$\Gamma_s^T = \frac{|\epsilon_1|}{|\epsilon_1| + |\epsilon_2|} \quad \text{et} \quad \Gamma_s^L = \frac{|\epsilon_2|}{|\epsilon_1| + |\epsilon_2|} \quad \text{pour les ions négatifs}$$

et

$$\Gamma_s^T = - \frac{|\epsilon_1|}{|\epsilon_2| - |\epsilon_1|} \quad \text{et} \quad \Gamma_s^L = \frac{|\epsilon_2|}{|\epsilon_2| - |\epsilon_1|} \quad \text{pour les ions positifs,}$$

où on tient compte du fait que dans le domaine de fréquence considéré $\Omega_H < \omega < \omega_*$, ϵ_1 et ϵ_2 sont tous les deux négatifs et que $|\epsilon_2| > |\epsilon_1|$.

Mode ordinaire

a) $\theta \rightarrow \pi$ Dans le cas de la propagation anti-parallèle au champ magnétique extérieur, le mode ordinaire est de polarisation transverse et gauche, d'où pour les ions positifs on obtient le résultat anticipé : $\Gamma_s^T = 1$ et $\Gamma_s^L = 0$.

Quant aux ions négatifs ils répartissent leur perte d'énergie sur les deux composantes selon les expressions :

$$\Gamma_s^T = \frac{\epsilon_1 + 2\epsilon_2 - \epsilon_3 - \frac{2\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_1 + \epsilon_2} (2 - \frac{q}{s})}{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + 2\epsilon_2 \frac{q}{s}}$$

$$\Gamma_s^L = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2)(2 - \frac{q}{s})}{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + 2\epsilon_2 \frac{q}{s}}$$

b) $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ Utilisant les expressions asymptotiques obtenues au paragraphe II-B on a pour expression : $\Gamma_s^T = 0$ et $\Gamma_s^L = 1$ pour les ions positifs et négatifs.

En résonance d'indices l'énergie perdue est donc entièrement concentrée sur la composante longitudinale.

Nous venons de présenter un calcul complet de la perte d'énergie d'une particule test dans le milieu diélectrique constitué par un magnétoplasma froid. Pour des raisons que nous avons indiquées, cette énergie perdue est intégralement rayonnée. D'autres auteurs ont évalué directement le rayonnement d'une particule test, en utilisant une méthode dite de l'"Hamiltonian". Cette méthode est une extension au cas d'un milieu diélectrique dispersif de celle utilisée par Heitler⁽³⁸⁾ dans le cas du vide. Le champ électromagnétique y est développé sur une base de vecteurs propres des équations de Maxwell dans le vide. Ceci fait apparaître des oscillateurs du champ dont on écrit l'équation d'évolution en présence du courant source dû au mouvement de la particule test. On peut théoriquement tirer de cette

équation une densité d'oscillateurs qui représente la densité d'énergie électromagnétique créée par la source.

En présence d'un milieu anisotrope caractérisé par un tenseur diélectrique $\epsilon_{\hat{\kappa}}$ indépendant de l'espace et du temps la méthode de l'Hamiltonien se généralise immédiatement en remplaçant la relation entre l'induction électrique $D_{\hat{\kappa}}(r,t)$ et le champ électrique $E_{\hat{\kappa}}(r,t)$ dans le vide par la relation $D_{\hat{\kappa}}(r,t) = \epsilon_{\hat{\kappa}} E_{\hat{\kappa}}(r,t)$ (39). On a voulu ensuite étendre la méthode au cas d'un magnétoplasma froid (37,40,41). Les choses deviennent moins claires. En suivant l'exposé de Liemohn (37), la relation entre $D_{\hat{\kappa}}(r,t)$ et $E_{\hat{\kappa}}(r,t)$ est écrite sous la forme : $D_{\hat{\kappa}}(r,t) = \epsilon_{\hat{\kappa}}(\omega) E_{\hat{\kappa}}(r,t)$ avec $\epsilon_{\hat{\kappa}}(\omega) = \epsilon_{\hat{\kappa}}^{\dagger}(\omega)$, $\epsilon_{\hat{\kappa}}^{\dagger}$ étant l'hermitique conjugué de $\epsilon_{\hat{\kappa}}$.

Cette écriture implique apparemment qu'on considère un champ monochromatique de la forme $E_{\hat{\kappa}}(r,t) = E_{\hat{\kappa}0}(r)e^{i\omega t}$. Or le courant source d Ω à la particule test n'est pas monochromatique. Il a un spectre de Fourier de la forme : $J_{\hat{\kappa}s}(k,\omega) = \text{const} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_{\hat{\kappa}s}(k,\omega) \delta(\omega - s\Omega_H - k.v)$ et l'induction électrique $D_{\hat{\kappa}}(r,t)$ qui s'écrit dans le cas général :

$$D_{\hat{\kappa}}(r,t) = \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \epsilon_{\hat{\kappa}}(\omega) E_{\hat{\kappa}}(k,\omega) e^{i(k.r - \omega t)}$$

(où V est le volume du système) prend la forme : $D_{\hat{\kappa}}(r,t) = \sum_s D_{\hat{\kappa}s}(r,t)$ où

$$\frac{V}{(2\pi)^3} D_{\hat{\kappa}s}(r,t) = \sum_{k, \hat{\kappa}} \epsilon_{\hat{\kappa}}(\omega_s) E_{\hat{\kappa}}(k,\omega_s) e^{i(k.r - \omega_s t)}$$

avec $\omega_s \equiv \omega_s(k) = s\omega_H + k.v_z$.

Ultérieurement ω_s et k seront reliés par l'équation de dispersion. $\epsilon_{\hat{\kappa}}(\omega_s)$ dépend donc de k , ce qui empêche de mettre $D_{\hat{\kappa}s}$ sous la forme : $D_{\hat{\kappa}s}(r,t) = \epsilon_{\hat{\kappa}}(\omega_s) E_{\hat{\kappa}}(r,t)$. Il nous semble donc que c'est au niveau de la relation entre l'induction et le champ électrique que se trouve une difficulté initiale et fondamentale dans l'extension de la méthode de l'Hamiltonien au cas d'un milieu anisotrope dispersif. Et c'est cette difficulté qui nous paraît expliquer la différence des résultats obtenus par cette méthode et par la méthode directe que nous avons exposée précédemment.

TROISIEME PARTIE

ANALYSE DU SPECTRE DU RAYONNEMENT CYCLOTRON-CERENKOV PROTONIQUE

EN BASSES FREQUENCES

Nous nous proposons dans cette dernière partie de donner une analyse détaillée du spectre angulaire et de fréquence de la perte d'énergie du proton test en basses fréquences, c'est-à-dire, pour des fréquences inférieures à la fréquence hybride basse ($s < \omega_*/\Omega_H$). Cette étude nous permettra d'une part de mettre en évidence des différences importantes avec la situation qu'on rencontre dans le vide. D'autre part l'existence d'indices élevés du plasma froid dans cette région des fréquences doit être liée, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, à l'apparition d'un spectre du rayonnement d'harmoniques de la fréquence cyclotron protonique sur les niveaux appréciables.

Rappelons les formules que nous avons données à la deuxième partie pour la distribution angulaire et le spectre de fréquence de la perte d'énergie :

Distribution angulaire

$$\Pi_s^{(i)}(\theta) = \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \tilde{q}^2 \tilde{z}_i \tilde{G}_i \frac{\tilde{I}_i^2}{F_i^2} \quad (\text{II-22})$$

avec

$$\tilde{G}_i = \frac{1}{1 + \tilde{\gamma}_i^2 + \tilde{\delta}_i^2} \left[\frac{P_1}{\left(\frac{\partial |\tilde{I}|}{\partial \tilde{q}} \right)} \right]_{\tilde{\omega}_i} \tilde{\omega}_i^2, \quad \tilde{F}_i = \left| 1 - \beta_z \cos \theta \left[\frac{\partial}{\partial q} (x_i q) \right]_{\tilde{q}} \right|$$

et

$$\tilde{\gamma}_i = \beta_{\perp} \left\{ \frac{s \tilde{\gamma}_i}{\tilde{\epsilon}_i} J_s(\tilde{\xi}_i) + J'_s(\tilde{\xi}_i) \right\} + \beta_z \tilde{\delta}_i J_s(\tilde{\xi}_i)$$

$$\tilde{\xi}_i = \tilde{x}_i \tilde{q} \beta_{\perp} \sin \theta, \quad \tilde{\gamma}_i = \frac{\tilde{x}_i^2 - \tilde{\epsilon}_1}{\tilde{\epsilon}_2}, \quad \tilde{\delta}_i = \tilde{\gamma}_i \frac{\tilde{x}_i^2 \sin \theta \cos \theta}{\tilde{x}_i^2 \sin^2 \theta - \tilde{\epsilon}_3}$$

où l'indice i est associé à un mode considéré.

- Spectre de fréquence

$$\Pi_s^{(i)}(\omega) = \frac{e^2}{c} \frac{\omega}{\tilde{x}_i} \frac{\tilde{G}_i}{\tilde{F}_i} \frac{\tilde{I}_i^2}{\tilde{F}_i} \quad (\text{II-24})$$

avec :

$$\tilde{F}_i = \beta_z \left| \tilde{x}_i + \cos \theta \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \cos \theta} \right)_{\theta} \right|$$

Ces formules font respectivement intervenir les fréquences "cohérentes" $\tilde{q}(\theta)$ et les angles d'émission $\tilde{\theta}(q)$ qui satisfont à l'équation (II-23) :

$$q - s - \tilde{x}(q, \theta) q \beta_z \cos \theta = 0,$$

c'est-à-dire, $\tilde{q}(\theta)$ est une solution pour θ donné de l'équation :

$$\tilde{q} - s - \tilde{x}[\tilde{q}(\theta), \theta] \tilde{q} \beta_z \cos \theta = 0 \quad (\text{III-1})$$

et $\tilde{\theta}(q)$ solution pour q donné de l'équation :

$$q - s - \tilde{x}[q, \tilde{\theta}(q)] q \beta_z \cos \tilde{\theta}(q) = 0 \quad (\text{III-2})$$

Le calcul de chaque spectre consiste en : 1) résoudre l'équation transcendante donnant $\tilde{q}(\theta)$ ou $\tilde{\theta}(q)$ et 2) calculer les expressions (II-22) et (II-24) en utilisant les expressions obtenues de $\tilde{q}(\theta)$ ou $\tilde{\theta}(q)$. Nous avons d'une part fait un calcul algébrique fondé sur les approximations suivantes :

$$a) \quad \frac{\omega}{\omega_*} \ll 1, \text{ ce qui entraîne } \frac{m_e}{m_i} s^2 \ll 1 \quad (\text{III-3})$$

et

$$b) \quad \frac{\beta_z}{\beta_A} \ll 1 \quad (\text{III-4})$$

Nous avons d'autre part fait un calcul numérique exact, c'est-à-dire sans utiliser les approximations a) et b). Ce dernier calcul a permis de légitimer les approximations utilisées. Nous avons choisi pour le calcul numérique une vitesse d'Alfvén : $v_A = 10^8$ cm/sec, ce qui correspond à un plasma de laboratoire avec $B_0 \approx 10^4$ Gauss et $n \approx 10^{12}$ cm⁻³ ou à un plasma ionosphérique $B_0 \approx 0,1$ Gauss et $n \approx 10^3$ cm⁻³. Le rapport c/v_A donnant l'ordre de grandeur de l'indice de modes, il joue un rôle primordial pour déterminer l'intensité du rayonnement. Un autre choix de v_A pourrait évidemment changer profondément les caractéristiques du spectre.

Nous allons maintenant considérer successivement la perte d'énergie sur le mode extraordinaire et sur le mode ordinaire.

A/ - Mode extraordinaire

Donnons maintenant les éléments du calcul approché de $\Pi(\theta)$ et $\Pi(\omega)$. En premier lieu, dans l'approximation "basses fréquences" (III-3) les composantes du tenseur diélectrique s'écrivent :

$$\epsilon_1 \approx \frac{1}{\beta_A^2} \frac{1 - \frac{m_e}{m_i} q^2}{1 - q^2}, \quad \epsilon_2 \approx \frac{1}{\beta_A^2} \frac{\left(1 - \frac{m_e}{m_i}\right) q}{1 - q^2} \quad \text{et} \quad \epsilon_3 \approx \frac{-m_i}{\beta_A^2 m_e} \frac{1}{q^2},$$

d'où l'expression de l'indice de réfraction du mode extraordinaire :

$$x_x^2(q, \theta) \approx \frac{2}{\beta_A^2} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta - 2 \frac{m_e}{m_i} q + \sqrt{\sin^4 \theta + 4q^2 \left(1 - 2 \frac{m_e}{m_i}\right) \cos^2 \theta}}, \quad (\text{III-5})$$

expression dans laquelle on retient les termes jusqu'à l'ordre de $\frac{m_e}{m_i} q^2$.

Notons que $\beta_A^2 x_x^2 \leq 1$ dans le domaine des fréquences considéré.

La disposition relative de la courbe de dispersion et des courbes de Cerenkov (Cf. Figure 4) montre les résultats suivants :

1)- Dans le cas $s > 0$ (composantes normales) les deux courbes de Cerenkov de numéro s et correspondant respectivement aux angles θ et $\pi - \theta$ coupent la courbe de dispersion au voisinage de $s\Omega_H$ du côté des basses fréquences, région où l'indice de réfraction est de l'ordre de c/v_A que nous supposons élevé. Notons qu'il existe un autre point d'intersection de la courbe de Cerenkov avec la courbe de dispersion du côté des hautes fréquences. Nous n'étudierons pas la contribution de ce point.

2) En $s = 0$ (rayonnement Cerenkov) il n'y a de solution que du côté des hautes fréquences (nous ne l'étudierons pas, non plus).

3) Pour $s < 0$, on ne trouve pas de solution en basses fréquences.

Avec l'expression de l'indice de réfraction (III-5) et en utilisant l'approximation $\beta_z/\beta_A \ll 1$ [(III-4)] , on peut résoudre l'équation algébrique qui donne la fréquence "cohérente" $\tilde{q}$. On obtient:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q} &= s(1 + \tilde{\Delta}_s) \\ \tilde{\Delta}_s &= \sqrt{2} x_x(s, \theta) \beta_z \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \text{avec :} \quad \text{(III-6)}$$

Par la même approximation, on obtient que l'angle d'émission $\bar{\theta}(q)$ est donné par la relation :

$$x_x(s, \bar{\theta}) \beta_z \cos \bar{\theta} = 1 - \frac{s}{q}$$

En remplaçant dans cette expression $x_x(s, \bar{\theta})$ par son expression (III-5) on obtient une équation bi-carrée en $\cos^2 \theta$, qui fournira une solution unique pour $\cos^2 \theta$.

A-1/- Distribution angulaire ⁽²³⁾

Considérons d'abord la distribution angulaire. Nous donnons les expressions approchées pour les grandeurs $(\gamma_x, \delta_x, G_x, F_x \text{ et } I_x)$ qui interviennent dans la formule générale de $\Pi(\theta)$. Les taux de polarisation

γ_x et δ_x sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} |\tilde{\gamma}_x| - 1 &\approx \frac{\beta_z}{\beta_A} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{(1 + \cos^2 \theta)^{3/2}}, \quad s = 1 \\ &= \left(1 - \frac{1}{s}\right) \frac{2s + \sin^2 \theta - \sqrt{\sin^4 \theta + 4s^2 \cos^2 \theta}}{1 + \cos^2 \theta + \sqrt{\sin^4 \theta + 4s^2 \cos^2 \theta}}, \quad s > 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-7})$$

$$|\tilde{\delta}_x| = |\tilde{\gamma}_x| \frac{m_e}{m_i} \tilde{q}^2 \beta_A^2 \tilde{x}_x^2 |\sin 2\theta| \ll \frac{m_e}{m_i} \tilde{q}^2 |\tilde{\gamma}_x| \ll |\tilde{\gamma}_x|, \quad \text{car } \frac{m_e}{m_i} \tilde{q}^2 \approx \frac{m_e}{m_i} s^2 \ll 1.$$

Les facteurs $\tilde{G}_x, \tilde{F}_x$ et $\tilde{I}_x$ peuvent se mettre sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} |\tilde{G}_x| &= \frac{1}{1 + \cos^2 \theta}, \quad s = 1 \\ &= s^2 \frac{1 + \cos^2 \theta + \sqrt{\sin^4 \theta + 4s^2 \cos^2 \theta}}{2s^2 - \sin^2 \theta + \sqrt{\sin^4 \theta + 4s^2 \cos^2 \theta}}, \quad s > 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\tilde{F}_x = \left| \frac{s}{\tilde{q}} + \beta_z \beta_A^2 \tilde{x}_x^2 \tilde{q}^2 \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{\sin^4 \theta + 4s^2 \cos^2 \theta}} \right| \approx \frac{s}{\tilde{q}} \approx 1, \quad \text{car } \beta_A \tilde{x}_x < 1 \text{ et } \frac{\beta_z}{\beta_A} \ll 1 \text{ par (III-4).}$$

$$-\tilde{I}_x = \frac{\beta_{\perp}}{2} \left[(|\tilde{\gamma}_x| + 1) J_{s+1}(\tilde{\xi}_x) + (|\tilde{\gamma}_x| - 1) J_{s-1}(\tilde{\xi}_x) \right] + \beta_z |\tilde{\delta}_x| J_s(\tilde{\xi}_x)$$

L'argument $\tilde{\xi}_x$ des fonctions de Bessel étant borné supérieurement par la valeur maximum de l'indice : $\tilde{\xi}_x = \tilde{x}_x \tilde{q} \beta_{\perp} \sin \theta \leq \frac{\beta_{\perp}}{\beta_A} \tilde{q} = \frac{\beta_{\perp}}{\beta_A} s$, on peut en déduire que

$\tilde{\xi}_x \ll 1$ si $\frac{\beta_{\perp}}{\beta_A} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \ll 1$, d'où il résulte l'inégalité :

$$|(|\tilde{\gamma}_x| - 1) J_{s-1}(\tilde{\xi}_x)| \gg |(|\tilde{\gamma}_x| + 1) J_{s+1}(\tilde{\xi}_x)|, \quad (\text{III-8})$$

qui est valable avec $s > 1$ et sous réserve de la condition supplémentaire $\tilde{\Delta}_1 \gg \frac{\beta_{\perp}^2}{4\beta_A^2}$ avec $s = 1$, cette dernière devant exclure le domaine angulaire voisin de $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Dès lors, en tenant compte de l'ordre de grandeur de $|\tilde{\gamma}_x|$, on obtient

$$- \tilde{I}_x = \frac{\beta_{\perp}}{2} (|\tilde{\gamma}_x| - 1) J_{s-1}(\tilde{\gamma}_x)$$

En remplaçant dans la formule (II-22) $\tilde{F}_x$ par 1 et $\tilde{I}_x$ par (III-8), on peut finalement mettre $\Pi_s^{(x)}(\theta)$ sous la forme :

$$- \Pi_s^{(x)}(\theta) = \frac{e^2 \Omega_H^2 q^2 \tilde{\omega}_x}{2\pi c} \frac{\beta_{\perp}^2 |\tilde{\gamma}_x| (|\tilde{\gamma}_x| - 1)^2 \tilde{I}_x^2}{4} \quad (\text{III-9})$$

Cette expression montre que la forme du spectre angulaire est déterminée essentiellement par le facteur $|\tilde{\gamma}_x| - 1$, c'est-à-dire, par le taux de polarisation. Pour cette raison nous donnons sur la figure 6 la variation angulaire de ce taux de polarisation. On y voit, ce qui est facile à vérifier algébriquement, ce facteur maximum pour le fondamental ($s=1$) pour l'angle $\theta = \sin^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 63^\circ$ et qu'il est toujours maximum en $\theta = \frac{\pi}{2}$ pour les harmoniques ($s>1$). Le calcul numérique vérifie bien à cet égard le calcul approché. D'autre part $\Pi(\theta)=0$ pour le fondamental en $\theta=0$ et $\frac{\pi}{2}$ et pour les harmoniques en $\theta=0$ et π . Cette propriété est due au fait que la polarisation du mode considéré est orthogonale à celle du courant protonique. L'émission nulle dans la direction $\theta=0$ vient de ce que la polarisation est indépendante de la fréquence ($|\tilde{\gamma}_x|=1$), ce qui est le cas tant pour le fondamental que pour les harmoniques. Dans le cas du fondamental en propagation oblique, seules les fréquences décalées par l'effet Doppler peuvent contribuer au rayonnement, ce qui exclut évidemment la direction $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Pour les harmoniques, la polarisation qui n'est pas pratiquement affectée par l'effet Doppler donne lieu à une émission dans la direction $\theta = \frac{\pi}{2}$.

En utilisant l'expression explicite (III-7) du taux de polarisation, on obtient les formules finales suivantes sur le fondamental :

$$- \Pi_1^{(x)}(\theta) = - \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \beta_A \left(\frac{\beta_{\perp} \beta_z}{2\beta_A} \right)^2 \frac{\sin^4 \theta \cos^2 \theta}{(1 + \cos^2 \theta)^{9/2}}, \quad (\text{III-10})$$

dont l'intensité maximum est :

$$\left[-\Pi_1^{(x)}(\theta) \right]_{\max} = -\frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} 0,0141 \beta_A \left(\frac{\beta_{\perp} \beta_z}{\beta_A^2} \right)^2, \text{ en } \theta = \sin^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}. \quad (\text{III-11})$$

et sur les harmoniques:

$$\left[-\Pi_s^{(x)}(\theta) \right]_{\max} = \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \beta_A \left(\frac{s \beta_{\perp}}{\beta_A} \right)^{2s} \frac{2^{-(s+\frac{1}{2})}}{[(s-2)!]^2} \frac{\sin^{2(s-1)\theta}}{\tilde{D}} \cdot \frac{(2s + \sin^2 \theta - \tilde{D})^2}{2s^2 - \sin^2 \theta + \tilde{D}} \frac{1}{(1 + \cos^2 \theta + \tilde{D})^{s+1/2}}, \quad s > 1 \quad (\text{III-12})$$

avec $\tilde{D} = \sqrt{\sin^4 \theta + 4s^2 \cos^2 \theta}$

Le maximum des harmoniques est donné par :

$$\left[-\Pi_s^{(x)}(\theta) \right]_{\max} = \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \beta_A \left(\frac{s \beta_{\perp}}{2\beta_A} \right)^{2s} \frac{1}{[(s-2)!]^2}, \text{ en } \theta = \frac{\pi}{2} \quad (\text{III-13})$$

Enfin le rapport de l'intensité maximum du fondamental à celle du deuxième harmonique est donné par:

$$\frac{\left[-\Pi_1^{(x)}(\theta) \right]_{\max}}{\left[-\Pi_2^{(x)}(\theta) \right]_{\max}} \approx 0,0141 \frac{\beta_z^2}{\beta_{\perp}^2} = 0,0141 \frac{W_z}{W_{\perp}} \quad (\text{III-14})$$

où $W_{\perp}$ et W_z sont respectivement l'énergie du proton test perpendiculaire et parallèle au champ magnétique extérieur B_0 .

L'expression (III-13) permet de voir que l'intensité maximum en $\theta = \frac{\pi}{2}$ est une fonction décroissante de s tout au moins jusqu'à la valeur de s tel que $\frac{\beta_{\perp} s}{\beta_A} < 1$, ce qui correspond à l'approximation de notre calcul, d'où le résultat important suivant : c'est toujours l'harmonique deux qui présente le maximum d'intensité dans le spectre au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$. D'autre part la relation (III-14) montre que l'intensité de l'harmonique deux est toujours plus grande que celle du fondamental à moins que l'énergie parallèle W_z soit beaucoup plus grande que l'énergie perpendiculaire $W_{\perp}$. Ces différents

résultats peuvent être observés sur les courbes de la figure 7 donnant les résultats du calcul numérique pour un certain nombre de valeurs du paramètre $W_z/W_\perp$. Les caractéristiques du rayonnement cyclotron d'une particule test dans le vide sont, comme on le sait bien, différentes de celles que nous observons ici. Rappelons cependant que notre calcul de la perte d'énergie ne doit pas être identifié directement au calcul du spectre angulaire du rayonnement (k et $\frac{d\omega}{dk}$ non-colinéaires dans un milieu anisotrope).

A-2/ - Spectre de fréquence

Sur le spectre de fréquence on a une correspondance univoque entre $\bar{\theta}$ et $\bar{q}$. $\bar{\theta}$ ayant un domaine de variation $(0, \pi)$, il en résulte que, pour tout s , on trouve un $\bar{q}$ dans une bande de fréquence finie. Ceci veut dire pratiquement qu'on doit s'attendre à trouver comme spectre de fréquence un spectre de raie centré sur les harmoniques $s\Omega_H$. La largeur de ces raies étaient évidemment due à l'effet Doppler et on peut en donner grossièrement l'ordre de grandeur. Nous avons dit en effet que l'indice de réfraction n_x est de l'ordre de c/v_A , donc k de l'ordre de ω/v_A . La largeur de raie par l'effet Doppler est donc de l'ordre de $k v_z \sim \omega \frac{\beta_z}{\beta_A}$.

Dans l'approximation $\beta_z/\beta_A \ll 1$ et en procédant comme précédemment on obtient les formules suivantes sur le spectre pour le fondamental et pour les harmoniques :

- pour le fondamental,

$$-\Pi_1^{(x)}(\omega) = \frac{e^2 \Omega_H^2 \beta_\perp^2}{c \beta_z} \frac{q(1-q)^2}{4} \frac{2q+1-\bar{\mu}^2-\bar{D}}{2q^2-1+\bar{\mu}^2+\bar{D}} \frac{1}{1-\bar{\mu}^2+2q\bar{\mu}^2+\bar{D}}, \quad s=1 \quad (\text{III-15})$$

- et pour les harmoniques,

$$-\Pi_s^{(x)}(\omega) = \frac{e^2 \Omega_H^2 \beta_A^2}{c \beta_z} \left(\frac{\beta_\perp}{\beta_A} \right)^{2s} \frac{(1-q)^2 q^{2s-1}}{2^{s+1} [(s-1)!]^2} \frac{(1-\bar{\mu}^2)^{s-1}}{(1+\bar{\mu}^2+\bar{D})^{s-1} (1-\bar{\mu}^2+2q\bar{\mu}^2+\bar{D})}, \quad s > 1 \quad (\text{III-16})$$

$$\bar{\mu} = \cos[\bar{\theta}(q)] \quad \text{et} \quad \bar{D} = \sqrt{(1-\bar{\mu}^2)^2 + 4q^2\bar{\mu}^2}$$

Quelques résultats de l'analyse numérique sont représentés sur la figure 8 pour différentes valeurs de $W_{\perp}$ et W_z . La raie fondamentale présente deux pics autour de la fréquence centrale $\omega = \Omega_H$, dont chacun est élargi par l'effet Doppler. En revanche, le spectre des harmoniques est essentiellement formé d'un seul pic, centré autour des fréquences $\omega = s\Omega_H$.

A-3/- Intensité totale du rayonnement

- Pour le fondamental on a :

$$\begin{aligned} -\overline{P_1(t)}^{(x)} &= -\int d\Omega \Pi_1(\theta) = -\int d\omega \Pi_1(\omega) \\ &= \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \frac{\beta_{\perp}^2 \beta_z^2}{4\beta_A} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\sin^5 \theta \cos^2 \theta}{(1+\cos^2 \theta)^{9/2}} = \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} 1,35 \cdot 10^{-2} \frac{\beta_{\perp}^2 \beta_z^2}{\beta_A} \end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

- Pour les harmoniques, on obtient :

$$\begin{aligned} -\overline{P_s(t)}^{(x)} &= \frac{e^2 \Omega_H^2}{c} \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{\beta_A \left(s \frac{\beta_{\perp}}{\beta_A}\right)^{2s}}{[(s-2)!]^2} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\sin^{2s-1} \theta}{\tilde{D}} \\ &\quad \cdot \frac{(2s + \sin^2 \theta - \tilde{D})^2}{2s^2 - \sin^2 \theta + \tilde{D}} \frac{1}{(1 + \cos^2 \theta + \frac{\tilde{D}}{\beta_A})^{s + \frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

L'intégration numérique a été poussée jusqu'au dixième harmonique. Les résultats en sont donnés dans le tableau (page suivante). Comme précédemment on y constate la prédominance de l'harmonique deux.

B/- Mode ordinaire

L'indice de réfraction de ce mode est donné par :

$$\omega_0^2(q, \theta) \approx \frac{2}{\beta_A^2} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta - 2 \frac{m_e}{m_i} q^2 - \sqrt{\sin^4 \theta + 4q^2 \left(1 - 2 \frac{m_e}{m_i}\right) \cos^2 \theta}} \quad (\text{III-19})$$

Il y a une résonance d'indice à la fréquence :

$$q_0^2 = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \frac{m_e}{m_i} \sin^2 \theta} \quad (\text{III-20})$$

Intensité totale du rayonnement sur le mode extraordinaire

$\begin{matrix} W_{\perp} \text{ (eV)} \\ s \end{matrix}$	1	10	100	1000
2	$6.64.10^{-13}$	$6.64.10^{-11}$	$6.64.10^{-9}$	$6.64.10^{-7}$
3	$4.55.10^{-17}$	$4.55.10^{-14}$	$4.55.10^{-11}$	$4.55.10^{-8}$
4	$1.79.10^{-21}$	$1.79.10^{-17}$	$1.79.10^{-13}$	$1.79.10^{-9}$
5	$5.35.10^{-26}$	$5.85.10^{-21}$	$5.85.10^{-16}$	$5.85.10^{-11}$
6	$1.75.10^{-30}$	$1.75.10^{-24}$	$1.75.10^{-18}$	$1.75.10^{-12}$
7	$4.82.10^{-35}$	$4.82.10^{-28}$	$4.82.10^{-21}$	$4.82.10^{-14}$
8		$1.22.10^{-31}$	$1.22.10^{-24}$	$1.22.10^{-15}$
9		$2.85.10^{-35}$	$2.85.10^{-26}$	$2.85.10^{-17}$
10			$6.15.10^{-29}$	$6.15.10^{-19}$

L'expression de l'indice de réfraction s'écrit alors en fonction de q_0^2 :

$$x_0^2(q, \theta) \approx \frac{1}{2\beta_A^2} \frac{1 + \cos^2\theta + \sqrt{\sin^4\theta + 4q^2 \cos^2\theta}}{\left(1 - \frac{q^2}{q_0^2}\right) \cos^2\theta} \quad (\text{III-21})$$

On peut étudier sur la figure 4 l'intersection de la courbe de dispersion et des courbes de Cerenkov (points notés par 4, 5 et 7). On observe :

1/- La courbe de dispersion est définie dans le domaine de fréquence inférieur à Ω_H .

2/- On a une solution (point 5) correspondant à un rayonnement anormal émis vers l'avant ($s < 0$, $\cos\theta > 0$).

3/- Le point 4 représente un rayonnement normal émis vers l'arrière ($s > 0$, $\cos\theta < 0$).

4/- Le point 7 représente un rayonnement Cerenkov émis en avant ($s = 0$, $\cos\theta > 0$).

On n'a donc pas sur le mode ordinaire le rayonnement cyclotron au sens habituel du terme (au voisinage de $s\Omega_H$). Néanmoins la particule test peut rayonner sur ce mode si la condition Cerenkov est satisfaite, ce qui implique que $|kv \cos\theta| \sim |s\omega_H|$.

Notons enfin que nous aurons affaire à des indices de réfraction élevés (supérieurs aux indices que nous avons à considérer en basses fréquences sur le mode extraordinaire, la direction $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ exceptée). Il y aura même une contribution des indices infinis, contribution qui donne lieu au problème de divergence dont nous avons parlé dans la deuxième partie ("Infinity catastrophe") et que nous reprendrons ici.

Nous allons présenter un calcul approché du spectre de la perte d'énergie (dans l'approximation $\beta_z/\beta_A \ll 1$), en considérant successivement le cas du rayonnement normal du rayonnement Cerenkov et du rayonnement anormal.

B-1/ - Rayonnement normal ($s > 0$, $\cos\theta < 0$)

a) Distribution angulaire

La condition Cerenkov s'écrivant ici : $x_0 = \frac{1}{\beta_z |\cos\theta|} \left(\frac{s}{q} - 1 \right)$,

la fréquence "cohérente" sera obtenue cette fois en cherchant une solution approchée de l'équation (III-1) par l'itération autour de la fréquence de résonance q_0 et en utilisant la condition $\beta_z/\beta_A \ll 1$. On trouve ainsi :

$$\tilde{q} = q_0 (1 - \tilde{\Delta}_s)$$

où pour le fondamental ($s=1$)

$$\tilde{\Delta}_1 = \left[\left(\frac{b}{3} \right)^3 + \frac{a}{2} + \left\{ a \left[\left(\frac{b}{3} \right)^3 + \frac{a}{4} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[\left(\frac{b}{3} \right)^3 + \frac{a}{2} - \left\{ a \left[\left(\frac{b}{3} \right)^3 + \frac{a}{4} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} b$$

avec :

$$a = \frac{\beta_z^2}{4\beta_A^2} \left[1 + \cos^2 \theta + \sqrt{\sin^4 \theta + 4q_0^2 \cos^2 \theta} \right]$$

$$b = \frac{1}{q_0} - 1 = \frac{\frac{m_2}{m_1} \tan^2 \theta}{1 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \tan^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}}}$$

(III-22)

et pour les harmoniques ($s > 1$)

$$\tilde{\Delta}_s = a \frac{q_0^2}{(s - q_0)^2}$$

Si $\beta_z^2/\beta_A^2 \ll 1$, on a : $a \ll 1$. De plus en dépit de la variation de b ($0 \leq b < \infty$), l'inégalité $\tilde{\Delta}_s \ll 1$ est valable pour tout s . Sur la figure 9 on montre la relation qualitative entre $\tilde{q}$ et θ ou alternativement entre $\bar{\theta}$ et q et ceci $s = 1$ et $s > 1$. Sur cette figure on remarque les deux points suivants :

1°/- Quant à la variation de $\tilde{q}$ il existe deux domaines angulaires désignés respectivement par D_I et D_{II} ; dans D_I la fréquence cohérente est pratiquement égale à la fréquence de résonance ($\tilde{q} \approx q_0$), l'effet Doppler y étant négligeable ($\tilde{\Delta}_s \ll 1$). Dans D_{II} , en revanche, l'effet Doppler peut être important notamment sur le fondamental et $\tilde{q}$ dépend peu de θ .

2°/- La relation entre $\tilde{q}$ et θ est univoque, alors que la relation entre $\bar{\theta}$ et q , dans un certain domaine de fréquences, ne l'est pas (il existe deux valeurs différentes de $\bar{\theta}$ pour q donné).

Un aspect particulier de la distribution angulaire est dû au fait que l'argument $\tilde{\xi}_0$ de la fonction de Bessel peut augmenter indéfiniment lorsque $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Ceci provient du comportement de $\tilde{x}_0$ dans cette limite :

$$\tilde{x}_0^2 \xrightarrow{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\beta_z \beta_A)^2} \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{\tilde{\epsilon}_1} \frac{s^2}{q^4} \rightarrow \infty.$$

On peut donc prévoir un comportement oscillant très rapide en fonction de θ de $\Pi(\theta)$. On est également amené à transformer l'expression de $\Pi(\theta)$ de manière à y faire apparaître un facteur à variation rapide et un facteur à variation relativement lente qui servira d'enveloppe du précédent. Dans cet esprit nous avons donc utilisé la relation de récurrence des fonctions de Bessel et nous avons réussi à mettre $\Pi(\theta)$ sous la forme suivante :

$$-\Pi_s^{(0)}(\theta) = \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \tilde{P}_M \tilde{P}_{osc} \quad (III-24)$$

où :

$$\tilde{P}_M = \tilde{q}^2 \tilde{x}_0^2 \frac{|\tilde{G}_0|}{\tilde{F}_0} \frac{\beta_{\perp}^2}{4} \left(1 + \tilde{\gamma}_0 \frac{1 + \frac{\tilde{q}}{s} \tilde{\zeta}}{1 + \tilde{\zeta}} \right)^2$$

$$\tilde{P}_{osc} = \left[J_{s-1}(\tilde{\xi}_0) + C_t J_{s+1}(\tilde{\xi}_0) \right]^2$$

avec :

$$\tilde{\zeta} = \frac{m_e}{m_i} \beta_A^2 \tilde{x}_0^2 \tilde{q}^2 \sin^2 \theta, \quad C_t = \frac{1 - \frac{1}{\tilde{\gamma}_0} \frac{1 + \frac{\tilde{q}}{s} \tilde{\zeta}}{1 + \tilde{\zeta}}}{1 + \frac{1}{\tilde{\gamma}_0} \frac{1 + \frac{\tilde{q}}{s} \tilde{\zeta}}{1 + \tilde{\zeta}}}$$

Examinons maintenant les deux cas préliminaires intéressants : $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et $\theta \rightarrow \pi$.

1) $\theta \rightarrow \pi$. Après quelques lignes d'algèbre, on obtient :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi-0} \left[-\Pi_s^{(0)}(\theta) \right] = \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \frac{\beta_{\perp}}{\beta_A} \frac{\tilde{q}^3}{(2+\tilde{q})(1-\tilde{q})^{1/2}} \quad , \quad s = 1$$

$$= 0 \quad , \quad s > 1$$

$$(III-25)$$

$$\text{où } \tilde{q} = 1 - \tilde{\Delta}_1(\theta = \pi) = 1 - (\beta_z/\beta_A)^{2/3}$$

Dans cette direction de propagation l'énergie rayonnée est concentrée sur le fondamental. Rappelons que, pour $\theta = \pi$, on n'a pas obtenu de rayonnement sur le mode extraordinaire.

2) $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ On a étudié cette limite dans la partie précédente à propos du problème de l'"Infinity catastrophe". Nous avons obtenu :

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \left[-\Pi_s^{(0)}(\theta) \right] = \frac{2}{\pi} \frac{\beta_A}{s\beta_z} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} q_0^2 \cos^2 \psi \rightarrow 0$$

avec $\tilde{\psi} = \tilde{\xi}_0 - \frac{\pi}{4} (2s + 1)$.

Nous allons enfin donner des expressions détaillées de $\Pi(\theta)$ en considérant successivement les domaines d'angles d'émission D_I et D_{II} que nous avons définis plus haut [Cf. figure 9(a)].

a-1) - Distribution angulaire dans D_{II}

Dans ce domaine $\tilde{\omega}$ varie lentement avec θ et q_0 est sensiblement égal à 1 [car, $(m_e/m_i) \tan^2 \theta \ll 1$ dans (III-20)]. En utilisant cette propriété on obtient pour les deux facteurs $\tilde{P}_M$ et $\tilde{P}_{osc}$ les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}_{II} &= \frac{\beta_{\perp}^2}{2\beta_A} \frac{1}{(2\Delta_s)^{1/2}} \frac{|\cos \theta|}{(1+\cos^2 \theta)^{1/2}} \frac{(1+\psi_s)^2}{2s+1+\frac{s-1}{\Delta_s}} \\ \tilde{P}_{osc} &= \left[J_{s-1}(\tilde{\xi}_0) + \frac{\psi_s - 1}{\psi_s + 1} J_{s+1}(\tilde{\xi}_0) \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (III-26)$$

avec :

$$\psi_s = \frac{(1+\chi_s)\{s+\chi_s(1+\cos^2 \theta)\}}{s \cos^2 \theta \{1+\chi_s(1+\cos^2 \theta)\}}, \quad \chi_s = \frac{m_e}{m_i} \frac{\tan^2 \theta}{2\Delta_s} \quad \text{et} \quad \tilde{\xi}_0 = \frac{\beta_{\perp}}{\beta_A} |\tan \theta| \left(\frac{1+\cos^2 \theta}{2\Delta_s} \right)^{1/2}$$

Au sujet du rayonnement dans ce domaine nous noterons seulement qu'il est de l'ordre de grandeur de $\frac{\beta_{\perp}^2}{\beta_A} \frac{1}{(2\Delta_s)^{1/2}}$ et qu'il augmente régulièrement quand θ varie de π à $\frac{\pi}{2}$.

a-2) - Distribution angulaire dans D_I

Cette fois $\tilde{\omega}$ varie rapidement avec θ (on n'a plus : $(m_e/m_i)\tan^2\theta \ll 1$). En raison de l'indice de réfraction très élevé et par conséquent, du fait que $\chi_s \gg 1$, $\tilde{\gamma}_0 \gg 1$ et $c_t \approx 1$ dans (III-26), il s'en suit que

$$\tilde{P}_{osc} \approx \frac{4s^2}{\tilde{\gamma}_0^2} J_s^2(\tilde{\xi}_0)$$

Il en résulte l'expression :

$$\left. \begin{aligned} - \Pi_s^{(o)}(\theta) &= \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \tilde{\Lambda}(\theta) J_s^2(\tilde{\xi}_0) \\ \text{avec :} \quad \tilde{\Lambda}(\theta) &= \frac{1}{|\cos\theta|} \frac{\left(\frac{m_e}{m_i} \tan^2\theta\right)^2}{\left(1 + \frac{m_e}{m_i} \tan^2\theta\right)^3} \end{aligned} \right\} \quad \text{(III-27)}$$

Pour obtenir (III-27) seuls les termes de l'ordre de $(m_e/m_i)\tan^2\theta$ sont retenus devant l'unité. $\tilde{\xi}_0$ étant grand, cette expression de $\Pi_s^{(o)}(\theta)$ se présente sous la forme du produit de la fonction $\tilde{P}_{osc}$ à variation très rapide et de la fonction $\tilde{\Lambda}(\theta)$ qui joue le rôle d'enveloppe pour les oscillations rapides de $\Pi_s^{(o)}(\theta)$.

$\tilde{\Lambda}(\theta)$ a un maximum pour $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} + 0,0105$ (radian), pour lequel $\tilde{\Lambda}_{\max} \approx \frac{25}{216} \left(5 \frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \approx 11$ et $\tilde{\Lambda}(\theta)$ décroît très rapidement autour de cette valeur. L'enveloppe du spectre angulaire présente donc un pic très aigu au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, l'ordre de grandeur du spectre dans D_I est déterminé par le facteur β_A^2/β_z , ce qui est nettement supérieur à $\frac{\beta_{\perp}^2}{\beta_A} \frac{1}{(2\Delta_s)^{1/2}}$, tant que le proton émetteur soit non relativiste. Donc le domaine D_{II} a une contribution relative négligeable.

b) - Spectre de fréquence

Le domaine angulaire D_{II} ne contribue pas davantage au spectre de fréquence qu'il contribue à $\Pi_s^{(o)}(\theta)$. Il suffit donc de considérer la con-

tribution de B_I [l'analogue du domaine D_I , voir figure 9(b)]. On obtient :

$$- \Pi_s^{(0)}(\theta) = \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \bar{\Lambda}(q) J_s^2(\bar{\xi}_0)$$

avec :

$$\bar{\Lambda}(q) = \frac{\frac{m_e}{m_i} \tan^2 \bar{\theta}}{(1 + \frac{m_e}{m_i} \tan^2 \bar{\theta})^{3/2}}, \quad \bar{\theta} = \theta(q)$$

(III-28)

$\bar{\Lambda}(q)$ passe par son maximum à la fréquence $q \approx \frac{1}{\sqrt{3}}$, pour laquelle $\bar{\Lambda}_{\max} \approx \frac{2}{3\sqrt{3}}$. La variation de $\bar{\Lambda}(q)$ est relativement moins rapide que celle de $\tilde{\Lambda}(\theta)$. Ceci peut s'expliquer par le fait que la courbe $\bar{\theta}$ en fonction de q a une pente très faible dans le domaine B_I .

C'est un spectre continu qui s'étend dans la gamme $(0, \omega_{\max})$ où on a pour $\omega_{\max}$ les expressions approchées suivantes :

- pour le fondamental -

$$\omega_{\max} \approx \Omega_H \left[1 - \left(\frac{\beta_z^2}{2\beta_A^2} \right)^{1/3} \left\{ 1 + \left(3 \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(\frac{\beta_A}{3\beta_z} \right)^{1/3} \right\}^{1/3} \right], \quad s=1$$

- et pour les harmoniques

$$\omega_{\max} \approx \Omega_H \left[1 - \frac{\beta_z}{2\beta_A} \frac{1}{s-1} \left(\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} + \frac{1}{s-1} \right) \right] \approx \Omega_H, \quad s>1$$

(III-29)

c) - Intensité totale du rayonnement

L'intensité totale pour un numéro d'harmonique s donné peut s'évaluer en intégrant (III-27) par rapport à l'angle solide $d\Omega$. Compte tenu de la variation rapide de $\tilde{\Lambda}(\theta)$ autour de $\theta_{\max}$ il suffit de considérer $\Pi_s^{(0)}(\theta)$ dans l'intervalle (θ_1, θ_2) de D_I où $\tilde{\Lambda}(\theta)$ conserve une valeur appréciable. L'intégrale devient alors :

$$- P_s^{(0)}(t) = \frac{e^2 \Omega_H^2}{c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sin\theta \tilde{\Lambda}(\theta) J_s^2(\tilde{\xi}_0)$$

Par le changement de variable $q^2 = (1 + \frac{m_e}{m_i} \tan^2 \theta)^{-1}$, on obtient :

$$- \overline{P_s^{(0)}}(t) = \frac{e^2 \Omega_H^2}{c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \int_{q_1}^{q_2} dq q (1-q^2) J_s^2(\tilde{\xi}_0)$$

où :

$$q_{1,2} = \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{|\cos \theta_{1,2}|}{\left(1 + \frac{m_i}{m_e} \cos^2 \theta_{1,2} \right)^{1/2}}, \quad \tilde{\xi}_0 = \frac{\beta_{\perp}}{\beta_z} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{(1-q^2)^{1/2}}{q} (s-q)$$

Si on choisit les bornes d'intégration tel que $\tilde{\lambda}(\theta) \approx 10^{-2} \tilde{\lambda}_{\max}$, on obtient $\theta_1 \approx 90,006^\circ$ et $\theta_2 \approx 93^\circ$, d'où $q_1 \approx 4,5 \cdot 10^{-3}$ et $q_2 \approx 0,912$. L'extension du domaine d'intégration sur l'intervalle (0,1) n'introduisant pas une erreur sérieuse, on peut récrire l'intégrale ci-dessus sous la forme :

$$- \overline{P_s^{(0)}}(t) = \frac{e^2 \Omega_H^2}{c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \int_0^1 dq q (1-q^2) J_s^2 \left[\frac{\beta_{\perp}}{\beta_z} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1-q^2}{q} (s-q) \right], \quad s \geq 1 \quad (\text{III-30})$$

Bien que l'intégrale existe l'intégration semble pratiquement incalculable si s n'est pas très grand. On se contentera donc de considérer la contribution des harmoniques d'ordre élevé ($s \gg q$), ce qui permettra de vérifier si la somme sur s de la perte d'énergie converge. Ce calcul de l'intégrale (III-30) pour s grand est développé dans l'appendice C.

On trouve :

$$- \overline{P_s^{(0)}}(t) \quad s \gg 1 \quad = \quad \frac{e^2 \Omega_H^2}{c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \frac{f(z)}{2 \pi s}$$

où :

$$f(z) = \frac{\frac{1}{z^2(1+z^2)} - 1}{z^2(1+z^2)} \left[1 + \frac{1}{8} \frac{(z^2-2)\{1+(1+z^2)^{1/2}\}}{(1+z^2)^{3/2}} \right], \quad \text{avec } z = \frac{\beta_{\perp}}{\beta_z} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \quad (\text{III-31})$$

Ce résultat montre qu'en effet la somme $\sum_{s=1}^{\infty} \overline{P_s^{(0)}}(t)$ diverge logarithmiquement. On doit donc que, bien que nous ayons levé le problème de la divergence de la perte d'énergie pour un harmonique s isolé ("Infinity catastrophe"), il reste que la perte d'énergie totale diverge sur le mode ordinaire.

L'introduction d'un $s_{\max}$ dans la somme signifierait qu'on limite supérieurement l'indice de réfraction. Ceci serait bien entendu arbitraire pour un magnétoplasma froid dans lequel il existe aucun mécanisme physique pour une telle situation.

Il faudrait, à ce propos, se souvenir du fait que nous considérons ici la limite plasma froid. Or cette limite soulève un problème dans les régions d'indices élevés : d'une part l'agitation thermique modifie grandement la forme des courbes de dispersion obtenus pour le plasma froid et d'autre part elle introduit de nouvelles résonances au voisinage des harmoniques de la fréquence cyclotron (Cf. Première partie).

D-2/- Rayonnement Cerenkov ($s = 0$, $\cos\theta > 0$)

a) Distribution angulaire et spectre de fréquence

La condition Cerenkov pouvant se mettre, dans ce cas, sous la forme simple : $x_0 = \frac{1}{\beta_z \cos\theta}$, on peut calculer facilement la fréquence "cohérente" par le même procédé qu'au paragraphe précédent. On obtient :

$$\tilde{q} = q_0 (1 - \tilde{\Delta}_0)$$

$$\text{où } \tilde{\Delta}_0 = \frac{\beta_z^2}{2\beta_A^2} (1 + q_0^2 \cos^2\theta)$$

Si $\beta_z^2/\beta_A^2 \ll 1$, on a toujours $\tilde{\Delta}_0 \ll 1$, d'où il résulte que la fréquence cohérente est pratiquement égale à la fréquence de résonance ($\tilde{q} \approx q_0$).

En procédant comme nous l'avons fait pour obtenir (III-24), on obtient les formules du spectre angulaire valables dans les domaines angulaires D_I et D_{II} ; dans D_I , on a :

$$-\Pi_o^{(0)}(\theta) = \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \tilde{\Lambda}'(\theta) J_o^2\left(\frac{\beta_{\perp}}{\beta_z} q_0 \tan\theta\right)$$

$$\text{où } \tilde{\Lambda}'(\theta) = \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 \frac{1}{\cos^5\theta \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \tan^2\theta\right)^3}$$

(III-32)

et dans D_{II} , on trouve

$$-\Pi_o^{(o)}(\theta) = \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \tilde{P}_M \tilde{P}_{osc}$$

où :

$$\tilde{P}_M = \frac{\beta_z^3}{\beta_A^2} \psi_o^2 \cos \theta$$

$$\tilde{P}_{osc} = \left[J_o(\tilde{\xi}_o) - \frac{\beta_+}{\beta_z \psi_o} J_1(\tilde{\xi}_o) \right]^2$$

(III-33)

avec :

$$\psi_o = \frac{\chi_o (1 + \chi_o) (1 + \cos^2 \theta)}{\sin \theta \cos \theta (1 + \chi_o (1 + \cos^2 \theta))}, \quad \chi_o = \frac{m_e \tan^2 \theta}{m_i 2 \tilde{\Delta}_o} \quad \text{et} \quad \tilde{\Delta}_o = \frac{\beta_z^2}{2 \beta_A^2} (1 + q_o \cos^2 \theta)$$

Il est facile de voir de ces expressions qu'il n'y a pas de rayonnement dans la direction à la fois $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Notons par ailleurs que la contribution à la perte d'énergie provient principalement du domaine D_I et que le domaine D_{II} n'a donc qu'une faible contribution. Le facteur $\tilde{\Lambda}'(\theta)$ présente, lui aussi, un pic très aigu au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$, comme dans le cas précédent.

Quant au spectre de fréquence, la contribution de B_I (l'analogue du domaine D_I) est prépondérante. On obtient :

$$-\Pi_o^{(o)}(\omega) = \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \bar{\Lambda}'(q) J_o^2(\bar{\xi}_o)$$

avec :

$$\bar{\Lambda}'(q) = \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{\cos^2 \theta \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \tan^2 \theta \right)^{3/2}}$$

(III-34)

Ce spectre a des caractéristiques analogues à celles que nous avons décrites précédemment pour le spectre du rayonnement normal. Ce spectre couvre presque tout le domaine de fréquence $(0, \Omega_H)$.

b)- Intensité totale du rayonnement

On peut calculer facilement l'intensité totale en intégrant (III-32) par rapport à l'angle solide. On obtient le résultat suivant:

$$-P_o^{(o)}(t) = \frac{e^2 \Omega_H^2}{c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sin\theta \frac{J_o^2\left(\frac{\beta_i}{\beta_z} q_o \tan\theta\right)}{\cos^5\theta \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \tan^2\theta\right)^3} \quad (\text{III-35})$$

$$\approx \frac{e^2 \Omega_H^2}{c} \frac{\beta_A^2}{12\beta_z} \left[3J_o^2(\alpha') + 2J_1^2(\alpha') - J_2^2(\alpha') \right] \quad (\text{III-36})$$

avec :

$$\alpha' = \frac{\beta_i}{\beta_z} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$$

Le calcul détaillé est développé dans l'appendice C.

B-3/- Rayonnement anormal ($s < 0$, $\cos\theta > 0$)

a) Distribution angulaire et spectre de fréquence

Cette fois la condition Cerenkov ayant la forme :

$\omega_o = \frac{1}{\beta_z \cos\theta} \left(1 + \frac{|s|}{q}\right)$, l'indice de réfraction est manifestement plus grand que celui qui était responsable du rayonnement normal ($s > 0$, $\cos\theta < 0$). En posant $-s = s' > 0$, on obtient la fréquence cohérente comme précédemment :

$$\tilde{q} = q_o (1 - \tilde{\Delta}_s)$$

avec $\tilde{\Delta}_s = a \frac{q_o^2}{(s' + q_o)^2}$, a étant défini par (III-22).

Puisque dans ce cas le rayonnement est émis en avant, on définit l'analogue des domaines angulaires D_I et D_{II} pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (Voir Figure 3(c)). Notons que le décalage de fréquence Δ'_s étant petit (de l'ordre de grandeur de β_z^2/β_A^2) il n'est plus nécessaire, comme au paragraphe B-1, de considérer séparément les cas de $s'=1$ et $s'>1$.

Après quelques manipulations algébriques, on obtient pour la distribution angulaire des expressions analogues à (III-26) et (III-27) : dans D_{II} , on a

$$\begin{aligned} -\Pi_{s'}^{(0)}(\theta) &= \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \tilde{P}_M \tilde{P}_{osc} \\ \text{où} \quad \tilde{P}_M &= \frac{\beta_{\perp}^2}{2\beta_A} \frac{1}{(2\Delta_{s'})^{1/2}} \frac{\cos\theta}{(1+\cos^2\theta)^{1/2}} \frac{(1-\psi_{s'})^2}{2s'-1+\frac{s'+1}{\Delta_{s'}}} \\ \tilde{P}_{osc} &= \left[J_{s'-1}(\tilde{\xi}_0) + \frac{\psi_{s'}+1}{\psi_{s'}-1} J_{s'+1}(\tilde{\xi}_0) \right]^2 \end{aligned} \quad (III-37)$$

où :

$$\psi_{s'} = \frac{(1+\chi_{s'})\{s'-\chi_{s'}(1+\cos^2\theta)\}}{s'\cos^2\theta\{1+\chi_{s'}(1+\cos^2\theta)\}}, \quad \chi_{s'} = \frac{m_e}{m_i} \frac{\tan^2\theta}{2\Delta_{s'}}, \quad \text{et} \quad \tilde{\xi}_0 = \frac{\beta_{\perp}}{\beta_A} \tan\theta \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2\Delta_{s'}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et dans D_I , on obtient :

$$\begin{aligned} -\Pi_{s'}^{(0)}(\theta) &= \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \tilde{\Lambda}(\theta) J_s^2(\tilde{\xi}_0) \\ \text{avec :} \quad \tilde{\Lambda}(\theta) &= \frac{1}{\cos\theta} \frac{\left(\frac{m_e}{m_i} \tan^2\theta \right)^2}{\left(1 + \frac{m_e}{m_i} \tan^2\theta \right)^3} \end{aligned} \quad (III-38)$$

expression qui est identique à (III-27). Il en résulte que le spectre angulaire du rayonnement anormal est pratiquement symétrique de celui du rayonnement normal par rapport à la direction $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ceci peut s'expliquer par le fait que, dans les deux cas (normal et anormal), le domaine D_I joue un rôle prépondérant, l'indice de réfraction étant du même ordre de grandeur :

$$\lim_{|\cos\theta| \ll 1} \tilde{x}_0^{(normal)} = \lim_{\tilde{q} \ll 1} \tilde{x}_0^{(normal)} = \frac{1}{\beta_z |\cos\theta|} \frac{|s|}{q}$$

En conclusion, il apparaît que le rayonnement sur le mode ordinaire est fortement concentré au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$; le diagramme angulaire de l'enveloppe des composantes à oscillation rapide présente deux lobes étroits autour de cette direction.

CONCLUSION
=====

Nous venons de présenter quelques aspects du problème du rayonnement d'un magnétoplasma sur des modes à indice de réfraction élevé. Ce problème est riche en effets physiques variés et nous n'avons fait ici qu'en aborder la complexité.

La situation la plus simple est évidemment celle du plasma froid, car dans ce cas l'énergie perdue par la particule test se retrouve en rayonnement. Nous avons justifié l'identification du spectre de rayonnement avec celui de la perte d'énergie (tout au moins en ce qui concerne le spectre de fréquence), en remarquant que la perte d'énergie se présente comme la somme des contributions des différents modes propagatifs dans le milieu. On peut vérifier que notre technique de calcul de $\sum_{\nu} \mathbf{E}_{\nu} \cdot \mathbf{J}$ fournit bien la formule de Schott pour le rayonnement cyclotron dans le vide et qu'elle donne l'expression exacte du rayonnement Cerenkov d'un oscillateur harmonique en mouvement uniforme dans un milieu isotrope non dispersif⁽⁴⁴⁾.

L'étude que nous avons faite dans le domaine des basses fréquences nous a permis de décrire d'une part un spectre continu pour des fréquences inférieures à la fréquence cyclotron protonique sur le mode ordinaire, spectre qui n'a pas d'équivalent dans le vide et d'autre part un spectre de raies sur les harmoniques de la fréquence cyclotron protonique sur le mode extraordinaire, dont les caractéristiques sont nettement différentes de celles du spectre dans le vide. Rappelons à ce sujet que nous avons montré l'existence d'harmoniques rayonnés par les protons non relativistes avec un maximum d'intensité sur l'harmonique deux. Ce point semble bien confirmé par les résultats expérimentaux obtenus sur OGRA. Il existe un problème délicat relatif à la perte d'énergie totale infinie (somme sur le numéro d'harmonique s) sur le mode ordinaire dans la direction perpendiculaire au champ magnétique, problème qui reflète manifestement les limitations du modèle plasma froid utilisé.

Comme nous l'avons dit, le rayonnement dans un plasma chaud n'est pas relié de façon simple à la perte d'énergie à cause de l'absorption du milieu. Une exception intéressante concerne les modes propagés perpendi-

culairement au champ magnétique s'il existe effectivement un domaine angulaire dans lequel des modes à indice élevé ne sont pratiquement pas amortis. On peut se demander si de tels modes seraient rayonnés par une particule test. Une condition de cohérence devrait être satisfaite : l'existence de points communs à la courbe de dispersion et à la courbe de Cerenkov et cette existence ne pourrait être déterminée que par une étude détaillée de la relation de dispersion au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$. Nous avons, quant à nous dans ce travail, montré qu'il existe des modes à indice élevé en propagation quasi-perpendiculaire sur les harmoniques de la fréquence cyclotron électronique, mais pour lesquels l'interaction résonnante ondo-particule est importante. De tels modes, fortement amortis, pourraient jouer un rôle dans le rayonnement provenant de la surface d'un plasma limité (et contribuer aussi à la génération d'harmoniques observés expérimentalement). A ce propos, il faut remarquer que ces modes à indice élevé (aussi bien les modes faiblement amortis que ceux que nous avons obtenus) ont une polarisation quasi-longitudinale et qu'il ne pourrait donc rayonner à l'extérieur du plasma qu'après une conversion longitudinale-transverse sur la frontière.

Pour finir nous pensons qu'il serait intéressant de calculer les coefficients d'émission et d'absorption du rayonnement incohérent dans un plasma chaud dans les régions d'indice élevé.

APPENDICE A

CALCUL DU VECTEUR PROPRE $\alpha^{(i)}$ ET FACTEUR $\left(\frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial x^2}\right)_{x_i^2}$

Le vecteur propre est déterminé par l'équation caractéristique :

$$(\tilde{T} - \lambda \tilde{1}) \cdot \tilde{\alpha} = 0 \quad (A-1)$$

où les éléments de $\tilde{T}$ sont donnés par

$$\left. \begin{aligned} T_{xx} &= \epsilon_1 - x^2 \cos^2 \theta, & T_{xy} &= \epsilon_2, & T_{xz} &= x^2 \sin \theta \cos \theta \\ T_{yy} &= \epsilon_1 - x^2, & T_{zz} &= \epsilon_3 - x^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (A-2)$$

A la limite $\lambda^{(i)} \rightarrow 0$ le vecteur propre correspondant $\alpha^{(i)}$ s'écrit

$$\alpha^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{pmatrix} T_{yy} T_{zz} \\ i T_{xy} T_{zz} \\ -T_{xz} T_{yy} \end{pmatrix} \quad (A-3)$$

Le facteur $M^{-1/2}$ assure la normalisation de $\alpha^{(i)}$ ($|\alpha^{(i)}| = 1$) :

$$M = T_{yy}^2 T_{zz}^2 + T_{xy}^2 T_{zz}^2 + T_{xz}^2 T_{yy}^2 \quad (A-4)$$

Introduisons deux facteurs de polarisation γ_i et δ_i par les relations :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i &\equiv \frac{E_x}{iE_y} = -\frac{T_{yy}}{T_{xy}} = \frac{x_i^2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} \\ \delta_i &\equiv \frac{E_z}{iE_y} = \frac{T_{zz} T_{yy}}{T_{xy} T_{zz}} = \frac{\epsilon_1 - x_i^2}{\epsilon_2} \cdot \frac{x_i^2 \sin \theta \cos \theta}{\epsilon_3 - x_i^2 \sin^2 \theta} = \gamma_i \frac{x_i^2 \sin \theta \cos \theta}{x_i^2 \sin^2 \theta - \epsilon_3} \end{aligned} \right\} \quad (A-5)$$

Exprimé avec γ_i et δ_i , $\alpha^{(i)}$ s'écrit :

$$\alpha^{(i)} = \frac{-\epsilon'}{(1+\gamma_i^2+\delta_i^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} \gamma_i \\ -i \\ \delta_i \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{(1+\gamma_i^2+\delta_i^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} \gamma_i \\ -i \\ \delta_i \end{pmatrix} \quad (A-6)$$

où $\epsilon' = \frac{T_{xy} T_{zz}}{|T_{xy} T_{zz}|}$, qui peut être soit +1 soit -1 selon le signe de T_{xy} . Cependant $\alpha^{(i)}$ apparaissant dans une forme quadratique, le signe de ϵ' n'intervient pas. On prendra $\epsilon' = -1$.

Passons maintenant à $\left(\frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial x^2} \right)_{x_i^2}$. On développe d'abord le déterminant de $T_{\alpha} - \lambda I_{\alpha}$ comme polynôme de λ :

$$\det (T_{\alpha} - \lambda I_{\alpha}) = \lambda^3 - p_2 \lambda^2 + p_1 \lambda - p_0 = 0$$

où

$$p_2 = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = \text{Trace de } T_{\alpha} = 2\epsilon_1 + \epsilon_3 - x^2 \quad (A-7)$$

$$p_1 = T_{xx} T_{yy} + T_{yy} T_{zz} + T_{zz} T_{xx} - T_{zy}^2 - T_{xz}^2$$

$$= x^4 - \{(2 + \sin^2 \theta) \epsilon_1 + (1 + \cos^2 \theta) \epsilon_3\} x^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 + 2\epsilon_1 \epsilon_3$$

$$p_0 = |T_{\alpha}| = (\epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta) x^4 - \{(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \sin^2 \theta + \epsilon_1 \epsilon_3 (1 + \cos^2 \theta)\} x^2 + \epsilon_3 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)$$

En prenant la dérivée première de (A-7) par rapport à x^2 on a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^2} = \frac{1}{3\lambda^2 - 2p_2 \lambda + p_1} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x^2} \lambda^2 - \frac{\partial p_1}{\partial x^2} \lambda + \frac{\partial p_0}{\partial x^2} \right)$$

d'où il suit qu'à la limite $\lambda \rightarrow 0$ [c'est-à-dire, $x \rightarrow x_i(\omega, \theta)$], l'expression ci-dessus devient :

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \right)_{x_i^2(\omega, \theta)} = \left[\frac{1}{p_1} \frac{\partial |T_{\alpha}|}{\partial x^2} \right]_{x_i^2(\omega, \theta)} \quad (A-8)$$

$$\text{avec } (p_1)_{x_1^2} = x_1^4 - \{(2 + \sin^2 \theta) \epsilon_1 + (1 + \cos^2 \theta) \epsilon_3\} x_1^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 + 2 \epsilon_1 \epsilon_3$$

$$\left[\frac{\partial |T|}{\partial x^2} \right]_{x_1^2} = 2(\epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta) x_1^2 - \{(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin^2 \theta + \epsilon_1 \epsilon_3 (1 + \cos^2 \theta)\}$$

APPENDICE B

NEGATIVITE DE G_1

La perte d'énergie définie par (II-1) est une quantité négative. On doit donc s'attendre, une fois qu'un mode est spécifié, à ce que les deux spectres (II-22) et (II-24) soient négatifs. Or dans ces expressions les facteurs autres que G_1 étant positifs, on démontre dans ce qui suit les négativités de G_1 .

Par définition

$$G_1 = \frac{1}{1+\gamma_1^2+\delta_1^2} \left[\frac{1}{P_1} \frac{\partial |T|}{\partial x^2} \right]_{x_1^2}^{-1}, \quad (B-1)$$

expression qui peut se mettre, à l'aide de l'équation de dispersion, sous la forme :

$$G = \left[\frac{T_{xy}^2 T_{zz}}{T_{yy}} \frac{1+\gamma_1^2+\delta_1^2}{\frac{\partial |T|}{\partial x^2}} \right]_{x_1^2} \quad (B-2)$$

où T_{xy} , T_{zz} et T_{yy} sont définis par (A-2). Dans (B-2), $T_{xy}^2 > 0$ et $1+\gamma_1^2+\delta_1^2 > 0$. D'autre part dans la gamme des basses fréquences : $0 \leq \omega \leq (\omega_0^2 + \Omega_0^2)^{1/2}$, on a toujours $\epsilon_3 < 0$, d'où il résulte que $T_{zz} = \epsilon_3 - x_1^2 < 0$. Le signe de G_1 est donc déterminé par les signes de T_{yy} et de $(\partial |T| / \partial x^2)_{x_1^2}$:

$$\text{Sgn } G_1 = - \text{Sgn} \left(T_{yy} \frac{\partial |T|}{\partial x^2} \right)_{x_1^2} \quad (B-3)$$

Décrivant le déterminant de T sous la forme : $|T| = A(x^2 - x_0^2)(x^2 - x_x^2)$ avec $A = \epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta$, on a, pour le mode extraordinaire, l'expression :

$$\left(\frac{\partial |T|}{\partial x^2} \right)_{x_x^2} = A(x_x^2 - x_0^2)$$

où x_x et x_o sont respectivement l'indice de réfraction des modes extraordinaire et ordinaire pour ω et θ donnés. Par simple inspection de figure 5, on obtient :

$$A < 0 \quad x_x^2 < x_o^2 \quad \left(\frac{\partial |T_y|}{\partial x^2} \right)_{x_x^2} > 0 \quad \text{pour } 0 < \omega < \omega_1$$

$$A > 0 \quad x_x^2 > x_o^2 \quad \left(\frac{\partial |T_y|}{\partial x^2} \right)_{x_x^2} > 0 \quad \text{pour } \omega_1 < \omega < \Omega_H$$

$$\text{et } A < 0 \quad x_x^2 > x_o^2 \quad \left(\frac{\partial |T_y|}{\partial x^2} \right)_{x_x^2} < 0 \quad \text{pour } \Omega_H < \omega < \omega_3$$

où les deux fréquences ω_1 et ω_3 sont les fréquences de résonance pour les modes extraordinaire et ordinaire en propagation oblique (Voir figure 3 aussi).

$$\text{Par ailleurs, } (T_{yy})_{x_x^2} = \epsilon_1 - x_x^2 > 0, \text{ pour } 0 < \omega < \Omega_H$$

$$< 0, \text{ pour } \Omega_H < \omega < \omega_3.$$

d'où il résulte que $\left(T_{yy} \frac{\partial |T_y|}{\partial x^2} \right)_{x_x^2} > 0$ pour $0 \leq \omega < \omega_3$. On vérifie donc la négativité de G_x : $G_x < 0$.

On peut également démontrer la négativité de G sur le mode ordinaire, dans le domaine des fréquences : $0 \leq \omega < \omega_1$.

APPENDICE C

CALCUL DES INTEGRALES (III-30) et (III-35)

1/- Intégration de (III-30)

Pour examiner la convergence de la somme $\sum_s (-P_s(t))$, on se limite à évaluer l'intégrale (III-30) pour s très grand. Celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$-P_s(t) \approx \frac{e^2 \Omega_H^2}{c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \int_0^1 dq \, q(1-q^2) J_s^2 \left[sz \frac{(1-q^2)^{1/2}}{q} \right], \quad s \gg 1 \quad (C-1)$$

où $z = \frac{\beta_{\perp}}{\beta_z} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}$

Après le changement de variable d'intégration $t = \alpha \frac{(1-q^2)^{1/2}}{q}$ avec $\alpha = sz$, on obtient

$$-P_s(t) \stackrel{s \gg 1}{=} \frac{e^2 \Omega_H^2 s^2}{c \beta_z} \frac{m_i}{m_e} \frac{\beta_A^2 \beta_{\perp}^2}{\beta_z^2} \int_0^{\infty} dt \frac{t^3 J_s^2(t)}{(t^2 + \alpha^2)^3} \quad (C-2)$$

Pour effectuer l'intégration il est commode d'écrire $J_s^2(t)$ sous la forme :

$$J_s^2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\psi \cos 2s\psi J_0(2t \sin \psi)$$

Alors on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} dt \frac{t^3 J_s^2(t)}{(t^2 + \alpha^2)^3} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\psi \cos 2s\psi \sin^2 \psi \left\{ \int_0^{\infty} d\zeta \frac{2\zeta}{(\zeta^2 + p^2)^2} J_0(\zeta) - \int_0^{\infty} d\zeta \frac{\zeta^2}{(\zeta^2 + p^2)^2} J_1(\zeta) \right\}, \quad p = 2\alpha \sin \psi \end{aligned}$$

Utilisant la formule⁽⁴²⁾ :

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^{v+1} J_v(x)}{(x^2 + z^2)^{\mu+1}} = \frac{1}{2^{\mu}} \frac{z^{v-\mu}}{\Gamma(\mu+1)} K_{v-\mu}(z) \quad \text{avec} \quad -1 < \text{Re}(v) < \text{Re}(2\mu) + \frac{3}{2},$$

on obtient

$$I = \frac{(-1)^s}{2\pi\alpha} \int_0^{\pi/2} d\theta \{ \cos(2s-1)\theta + \cos(2s+1)\theta \} K_1(2\alpha \cos\theta) \\ - \frac{(-1)^s}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \{ \cos 2s\theta + \frac{1}{2} \cos(2s-2)\theta + \frac{1}{2} \cos(2s+2)\theta \} K_0(2\alpha \cos\theta)$$

En utilisant l'identité⁽⁴²⁾ :

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \cos(\mu-\nu)\theta K_{\mu+\nu}(2\alpha \cos\theta) = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\sin(\mu+\nu)\pi} [I_{-\mu}(\alpha)I_{-\nu}(\alpha) - I_{\mu}(\alpha)I_{\nu}(\alpha)]$$

valable pour $|\operatorname{Re}(\mu+\nu)| < 1$, et en se rappelant la définition de la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce $K_n(z)$:

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_{\nu}(z) = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial \nu} - \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}$$

On obtient successivement :

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \cos(2s-1)\theta K_1(2\alpha \cos\theta) = \frac{\pi}{4} (-1)^s [I_s(\alpha)K_{s-1}(\alpha) - I_{s-1}(\alpha)K_s(\alpha)] \\ \int_0^{\pi/2} d\theta \cos(2s+1)\theta K_1(2\alpha \cos\theta) = \frac{\pi}{4} (-1)^{s+1} [I_{s+1}(\alpha)K_s(\alpha) - I_s(\alpha)K_{s+1}(\alpha)] \\ \int_0^{\pi/2} d\theta \cos 2s\theta K_0(2\alpha \cos\theta) = \frac{\pi}{2} (-1)^s I_s(\alpha)K_s(\alpha) \\ \int_0^{\pi/2} d\theta \cos(2s\mp 2)\theta K_0(2\alpha \cos\theta) = \frac{\pi}{2} (-1)^{s\mp 1} I_{s\mp 1}(\alpha)K_{s\mp 1}(\alpha)$$

En groupant les expressions obtenues plus haut et en tenant compte du fait que $K'_s(\alpha)$ est négatif pour $\alpha \geq 0$, on arrive finalement à l'expression :

$$I = \frac{1}{\pi^2} \left[\left\{ \frac{1}{\alpha} I_s(\alpha) + \frac{1}{4} I'_s(\alpha) \right\} |K'_s(\alpha)| - \left\{ \frac{1}{\alpha} I'_s(\alpha) + \left(1 + \frac{s^2}{\alpha^2}\right) \frac{1}{4} I_s(\alpha) \right\} K_s(\alpha) \right] \quad (C-3)$$

Examinons maintenant la dépendance asymptotique de I en s . Pour cela le développement asymptotique des fonctions de Bessel modifiées est utile⁽⁴³⁾ :
par exemple :

$$I_s(sz) \simeq \frac{1}{(2\pi s)^{1/2}} \frac{e^{s\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left\{ 1 + \frac{u_1(t)}{s} + \frac{u_2(t)}{s^2} + \dots \right\}$$

avec $u_1(t) = \frac{t}{24} (3-5t^2)$, $u_2(t) = \frac{t^2}{1152} (81-462t^2+385t^4)$ etc...

$$\text{et } t = (1+z^2)^{-1/2}, n = (1+z^2)^{1/2} + \log \frac{z}{1+(1+z^2)^{1/2}}$$

L'expression ci-dessus est uniformément convergente si $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - 0$.

Après quelques lignes de calcul on obtient enfin l'expression suivante :

$$I \approx \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{s^3} f(z) + O\left(\frac{1}{s^4}\right)$$

$$\text{où } f(z) = \frac{(1+z^2)^{1/2}-1}{z^2(1+z^2)} \left[1 + \frac{1}{8} \frac{(z^2-2)\{1+(1+z^2)^{1/2}\}}{(1+z^2)^{3/2}} \right]$$

L'intensité totale du rayonnement normal pour s donné ($s \gg 1$) est donné alors par :

$$\overline{P_s}(t) \underset{s \gg 1}{=} \frac{e^2 \Omega_H^2}{2\pi c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \frac{1}{\pi s} f(z) \quad (C-4)$$

C'est l'expression (III-31)

2/- Intégration de (III-35) :

Le calcul est plus simple. Après le changement de variable :

$q^2 = \left(1 + \frac{m}{m_i} \tan^2 \theta\right)^{-1}$ et en étendant l'intervalle d'intégration (q_1, q_2) à $(0, 1)$ on a :

$$\overline{P_o}(t) = \frac{e^2 \Omega_H^2}{c} \frac{\beta_A^2}{\beta_z} \int_0^1 dq q(1-q^2) J_0^2\{z(1-q^2)^{1/2}\} \quad (C-5)$$

En posant de nouveau : $t = z(1-q^2)^{1/2}$ et en utilisant la formule⁽⁴²⁾ :

$$\begin{aligned} & (\rho + \mu + \nu) \int^Z dt t^{\rho-1} J_\mu(t) J_\nu(t) + (\rho - \mu - \nu - 2) \int^Z dt t^{\rho-1} J_{\mu+1}(t) J_{\nu+1}(t) \\ & = z^\rho \left[J_\mu(z) J_\nu(z) + J_{\mu+1}(z) J_{\nu+1}(z) \right], \end{aligned}$$

(où $\int^Z$ désigne l'intégrale indéfinie) on obtient finalement (III-36).

BIBLIOGRAPHIE

- (1) B.A. TRUBNIKOV et V.S. KUDRYAVTSEV, "Plasma Radiation in a Magnetic field", 2nd United Nations International Conference on the Peaceful Use of Atomic Energy, A/Conf 15/ P 2213, Geneva (1959).
- (2) D.B. BEARD, "Cyclotron Radiation from Magnetically Confined Plasmas", Phys. Fluids, 2, 379, (1959).
- (3) D.B. BEARD, "Relativistic Calculation for Cyclotron Radiation from Hot Plasmas", Phys. Fluids, 3, 324, (1960).
- (4) W. DRUMMOND et M.N. ROSENBLUTH, "Cyclotron Radiation from a Hot Plasma", Phys. Fluids, 3, 45, (1960).
- (5) G. BEKEFI, J.L. HIRSHFIELD et S.C. BROWN, "Kirchhoff's Radiation Law for Plasmas with Non-Maxwillian Distributions", Phys. Fluids, 4, 173, (1961).
- (6) J.L. HIRSHFIELD, D.F. BALDWIN et S.C. BROWN, "Cyclotron Radiation from a Hot Plasma", Phys. Fluids, 4, 198, (1961).
- (7) G. BEKEFI, J.L. HIRSHFIELD et S.C. BROWN, "Cyclotron Emission from Plasmas with Non-Maxwillian Distributions", Phys. Rev. 122, 1037, (1961).
- (8) L. OSTER, "Cyclotron Radiation from Relativistic Particles with Arbitrary Velocity Distributions", Phys. Rev. 121, 961, (1961).
- (9) L. OSTER, "Effects of Collisions on the Cyclotron Radiation from Relativistic Particles", Phys. Rev. 119, 1444, (1960).
- (10) G. LANDAUER, "Magnetfeldabhängige Microwellen-Strahlung aus einer He-Gasentladung", Proc. Vth International Conference on Ionization Phenomena in Gases, München, Vol.1, 389, (1961).
- (11) G. LANDAUER, "Generation of Harmonics of the electron-gyrofrequeny in a Penning Discharge", J. Nucl. Energy Part C, 4, 395, (1962).
- (12) G. BEKEFI, J.D. COCCOLI, E.B. HOOPER Jr, et S.J. BUCHSBAUM, "Microwave Emission and Absorption at Cyclotron Harmonics of a Warm Plasma", Phys. Rev. Letters, 9, 6, (1962).
- (13) K. MITANI, H. KUBO et S. TANAKA, "Microwave Radiation from a Plasma in a Magnetic field", J. Phys. Soc. Japan, 19, 211, (1964).

- (14) H. KUBO, K. MITANI et S. TANAKA, "Microwave Radiation from a Plasma in a Magnetic Field II", J. Phys. Soc. Japan, 19, 221, (1964).
- (15) S. TANAKA et H. KUBO, "Microwave Radiation at Cyclotron Harmonics in a Positive Column", Research Note IPPJ-23, Institute of Plasma Physics, Nagoya Univ. Japan, (1964).
- (16) F.W. CRAWFORD, "Cyclotron Harmonic Waves in Warm Plasmas", M.L. Report n° 1273, Microwave Laboratory, Stanford Univ. U.S.A., (1964).
- (17) H. DREICER, "Emission of Cyclotron Radiation from a PIG discharge", Bull. Am. Phys. Soc., 9, 512, (1964).
- (18) H. IKEGAMI, "Microwave Emission at Electron cyclotron Harmonics", Report SU-IPR n°29, Institute for Plasma Research, Stanford Univ., (1965).
- (19) I.N. GOLOVIN, L.I. ARTEMENKOV, G.F. BOGDANOV, D.A. PANOV, V.I. PISTUNOVITCH et N.N. SEMASHKO, "Work with the Experimental Thermonuclear System OGRA", Sov. Phys. Uspeki, 4, 323, (1961).
- (20) J. SCHWINGER, "On the Classical Radiation of Accelerated Electrons", Phys. Rev. 75, 1912, (1949).
- (21) W.P. ALLIS, S.J. BUCHSBAUM et A. BERS, "Waves in Anisotropic Plasmas", M.I.T. Press, Cambridge, (1963).
- (22) V.S. PISTUNOVITCH et V.D. SHAFRANOV, "Cyclotron Radiation by ions in plasma", Nucl. Fusion, 1, 189, (1961).
- (23) Y. FURUTANI et G. KALMAN, "On the Angular Spectrum of Ion cyclotron Harmonics", Phys. Fluids, 10, 2405, (1967).
- (24) Y. FURUTANI et G. KALMAN, "Rayonnement Cyclotron-Cerenkov sur le siffleur protonique", à paraître.
- (25) G. KALMAN et Y. FURUTANI, "Energy loss and Cherenkov-Cyclotron Radiation of an ion in a Plasma", à paraître.
- (26) T.H. DUPREE, "Theory of Radiation Emission and Absorption in Plasma", Phys. Fluid, 6, 923, (1964).
- (27) I.B. BERNSTEIN, "Waves in a plasma in a Magnetic field", Phys. Rev. 109, 10, (1958).
- (28) Y.N. DNESTROVSKII et D.P. KOSTOMAROV, "Dispersion Equation for an Ordinary Wave Moving in a Plasma perpendicular to an External Magnetic Field", Sov. Phys. JETP 13, 986, (1961).
- (29) Y.N. DNESTROVSKII et D.P. KOSTOMAROV, "Dispersion Equation for an Extraordinary Wave Moving in a Plasma across an External Magnetic Field", Sov. Phys. JETP. 14, 1089, (1962).

- (30) Y. FURUTANI et G. KALMAN, "High Refractive Index at Electron Cyclotron Harmonics in a Plasma", J. Nucl. Energy, Part. C, 7, 381, (1965).
- (31) E. CANOBBIO et R. CROCI, "Harmonics of the Electron Cyclotron frequency in a PIG discharge", 6^e Conf. Internationale sur les phénomènes d'ionisation dans les gaz, vol. III, 269, (1963), Paris.
- (32) J. DRUMMOND, "Basic Microwave Properties of Hot Magnetoplasma", Phys. Rev. 110, 293, (1958).
- (33) G. WATSON, "A Treatise of the Theory of Bessel Functions", 2nd Edition, Cambridge Press, (1962).
- (34) E.D. FRIED et S.D. CONTE, "The Plasma Dispersion Function", Academic Press, New-York (1961).
- (35) T.H. STIX, "The Theory of Plasma Waves", Mc Graw Hill (1962).
- (36) Quelques articles dans le "Proc. Int. Symp. on Antennas in Ionized Media", L'onde Electrique 45 (Déc. 1965).
- (37) H.B. LIEMOHM, "Radiation from Electrons in a Magnetoplasma", Radio Science Journal of Research NBS/USNC-URSI, 69 D, 741, (1965).
- (38) W. HEITLER, "Quantum Theory of Radiation", 3rd Edition, Oxford, Clarendon Press, (1954).
- (39) V.L. GINSBURG, "Electrodynamics of Anisotropic Medium", Sov. Phys. JETP 10, 601, (1940).
- (40) A.A. KOLOMENSKII, "Electrodynamics of a gyrotropic medium", Sov. Phys. JETP 24, 167, (1953).
- (41) V. Ia. Eidman, "The Radiation from an Electron moving in a Magnetoactive Plasma", Eng. Transl. Sov. Phys. JETP 7, 91, (1958) ; Errata, Eng. Trans. Sov. Phys. JETP 9, 947, (1959).
- (42) Y.L. LUKE, "Integrals of Bessel Functions", Mc Graw-Hill Book C² (1962).
- (43) M. ABRAMOWITZ et I.A. STEGUN, "Handbook of mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables" , N.B.S., U.S. Department of commerce, (1964).
- (44) V.L. GINZBURG, "Certain Theoretical Aspects of Radiation due to Superluminal Motion in a Medium", Sov. Phys. Uspekhi, 2, 874, (1960).

FIGURES ET LEGENDES

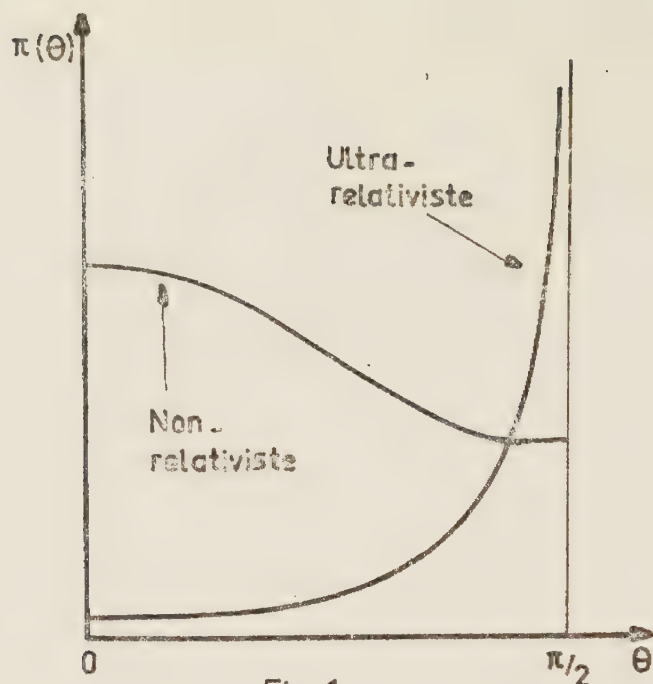


Fig 1

Spectre angulaire de rayonnement $\Pi(\theta)$ moyenné sur une période de gyration de la particule émettrice en fonction de l'angle d'émission θ avec le champ magnétique.

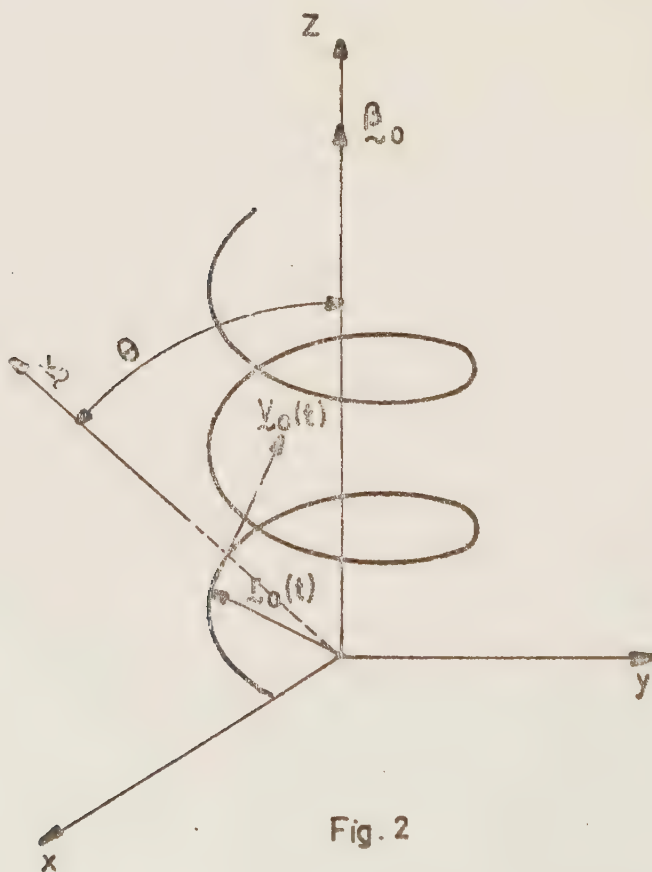
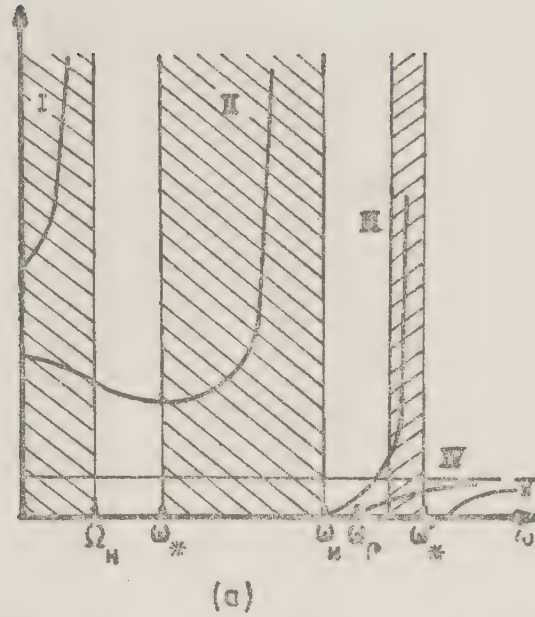


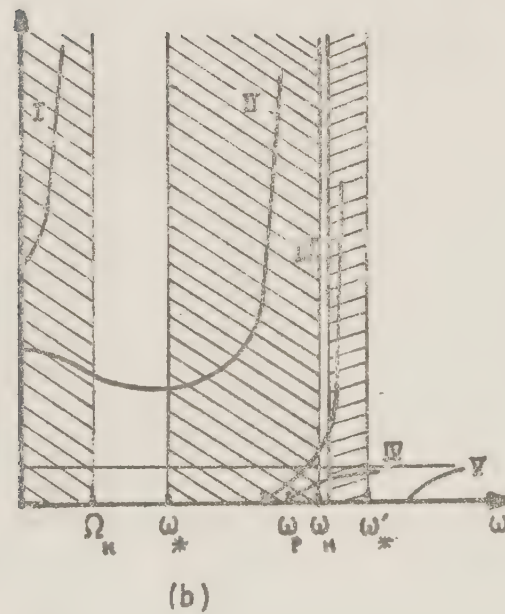
Fig. 2

Géométrie de la trajectoire d'une particule test.

Fig. 3

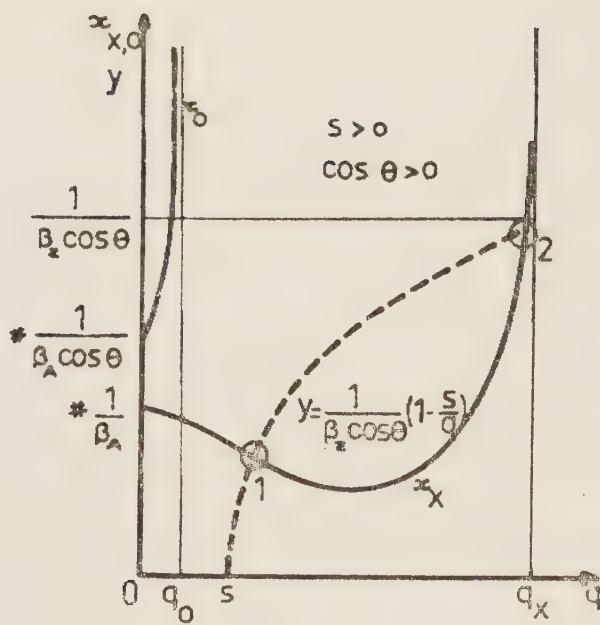


Cas d'un plasma dense ($\omega_p > \omega_H$)

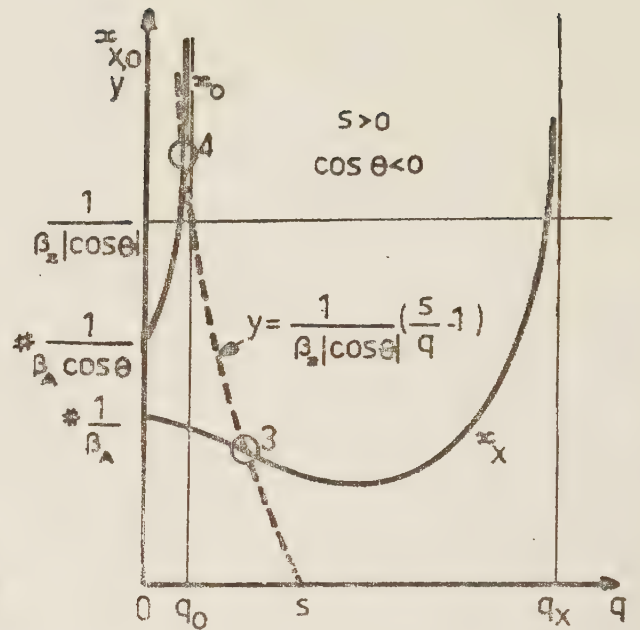


Cas d'un plasma ténu ($\omega_p < \omega_H$)

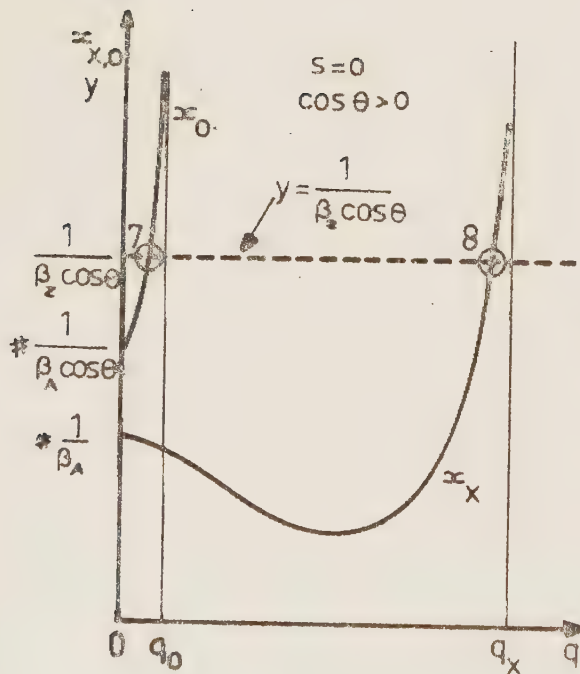
Les fréquences ω_H , Ω_H , ω_* , ω'_* et ω_p sont respectivement les fréquences cyclotron électronique, protonique, les fréquences hybride basse et haute et la fréquence de plasma ($\omega_p = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2}$). Les bandes hachurées représentent les domaines où se déplacent les résonances quand varie l'angle de propagation.



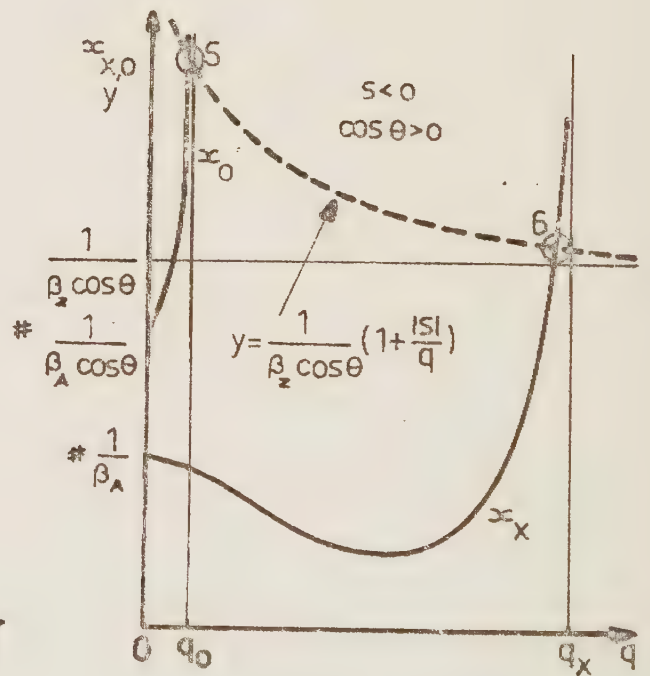
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 4

LEGENDE DE LA FIGURE 4

Les fréquences d'émission "cohérentes", déterminées par l'intersection de la courbe de dispersion des modes extraordinaire (désigné par ω_x) et ordinaire (représenté par ω_o) et les courbes dites de Cerenkov (désignées par y). q_o et q_x sont respectivement les fréquences de résonance des modes ordinaire et extraordinaire en propagation oblique, normalisées sur la fréquence cyclotron protonique Ω_H . Ces courbes sont tracées pour un numéro d'harmonique s donné et pour un angle d'émission θ fixé.

- Figure 4 (a) - Rayonnement Cyclotron-Cerenkov normal émis vers l'avant. Le point 1 contribue à l'harmonique s décalé par l'effet Doppler et, le point 2 constitue une bande d'émission continue entre les deux fréquences :

$$q_x(\theta=\frac{\pi}{2}) = \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \text{ et } q_x(\theta=0), \text{ lorsqu'on fait varier } \theta \text{ pour } s \text{ fixé.}$$

- Figure 4 (b) - Rayonnement Cyclotron-Cerenkov normal émis en arrière. Le point 3 est responsable de l'émission en arrière de l'harmonique s décalé également par l'effet Doppler et le point 4 constitue une bande continue comprise entre les deux fréquences : $q_o(\theta=\frac{\pi}{2})=0$ et $q_o(\theta=0)=1$.

- Figure 4 (c) - Rayonnement Cerenkov émis en avant. Le point 8 appartient à la même gamme de fréquences continue que le point 2 et la contribution du point 7 s'ajoute à celle du point 4.

- Figure 4 (d) - Rayonnement Cyclotron-Cerenkov anormal émis en avant. Les points 5 et 6 se trouvent, respectivement, dans la même bande que les points 4 et 2.

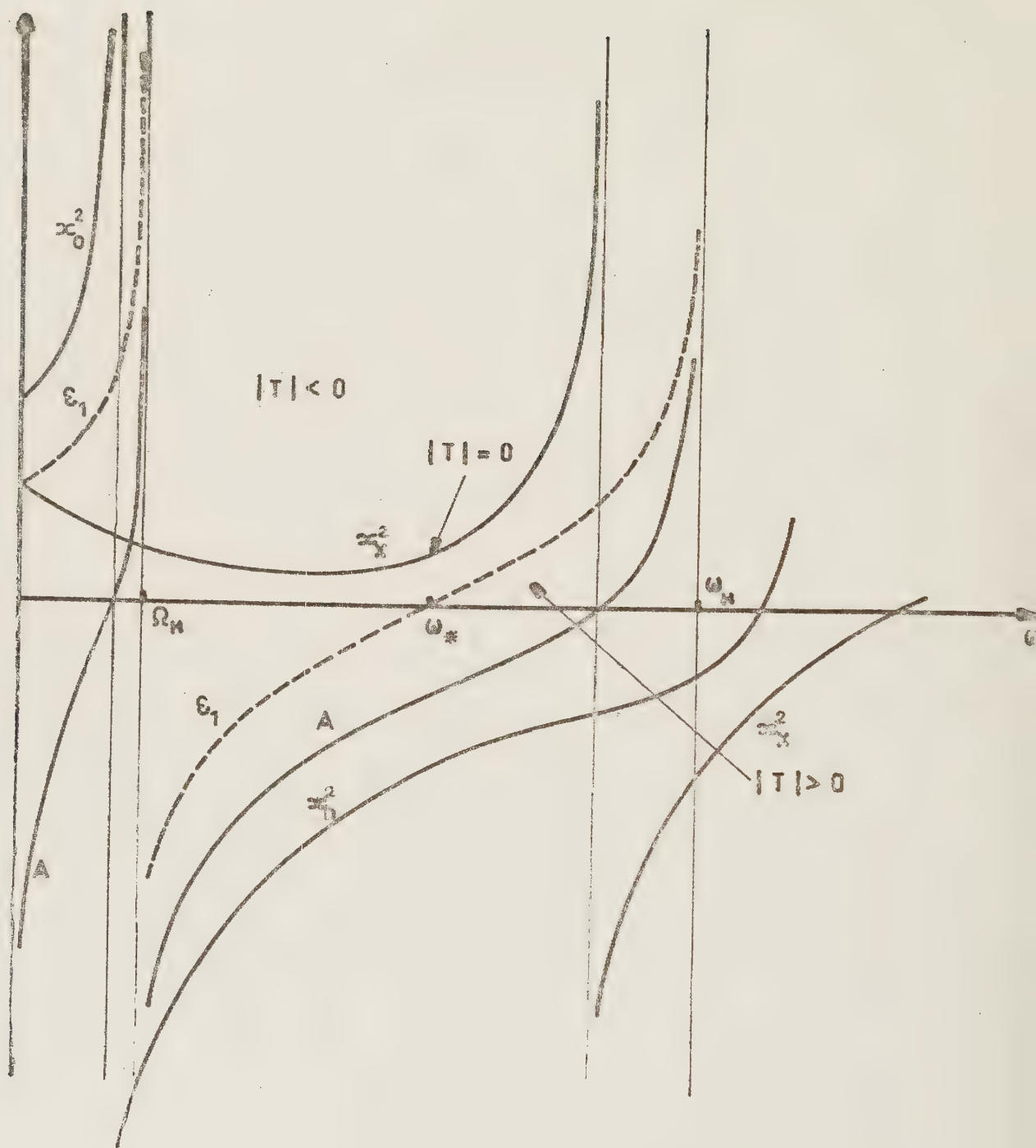


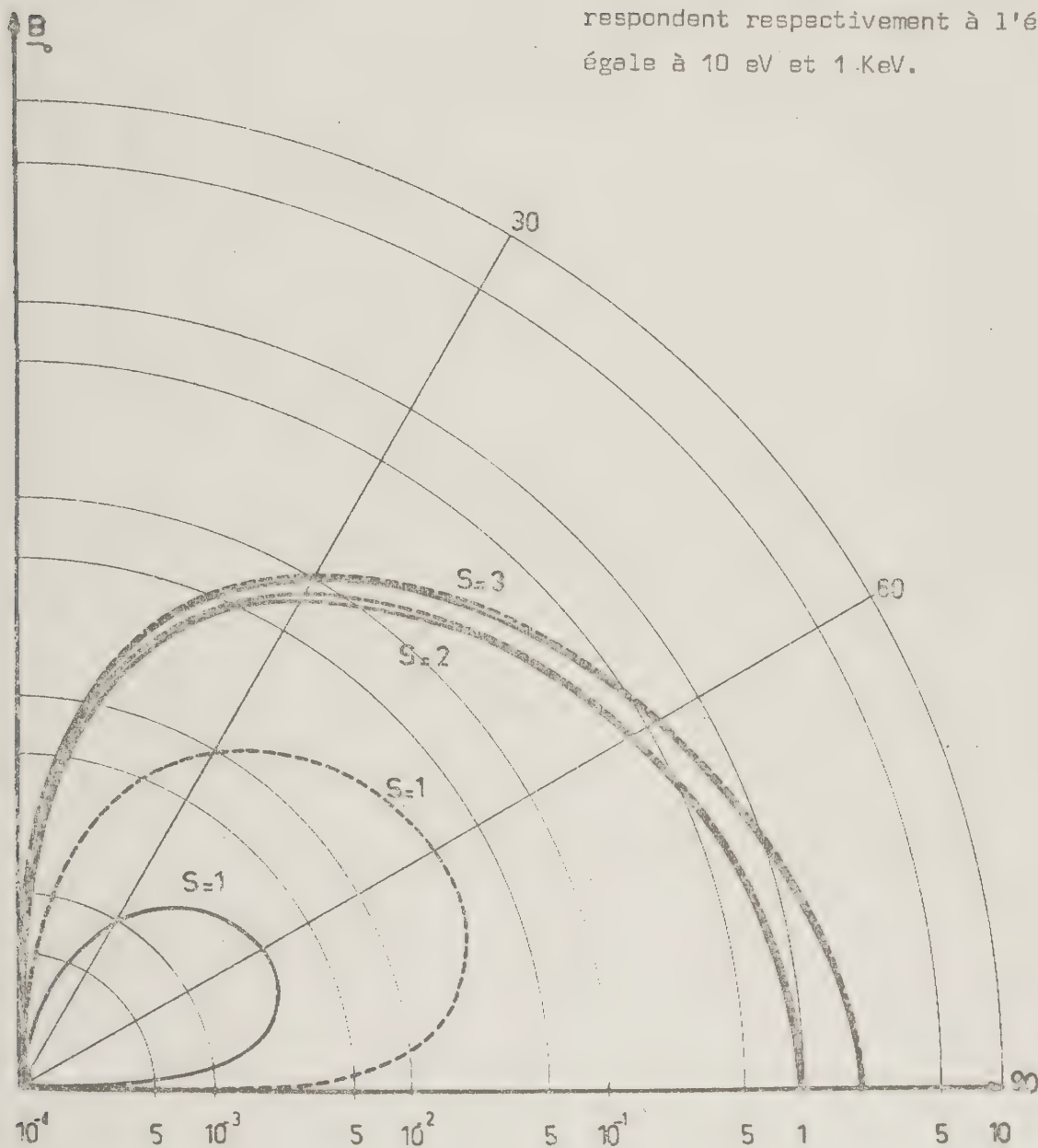
Fig. 5

Allure générale des grandeurs x_0 , x_x , A et ϵ_1 . x_0 et x_x sont respectivement les indices de réfraction des modes ordinaire et extraordinaire.

Taux de polarisation $|\hat{Y}_x| - 1$ en fonction de l'angle d'émission θ avec le champ magnétique B_0 .

Fig. 6

Les lignes continue et pointillée correspondent respectivement à l'énergie W_z égale à 10 eV et 1 KeV.



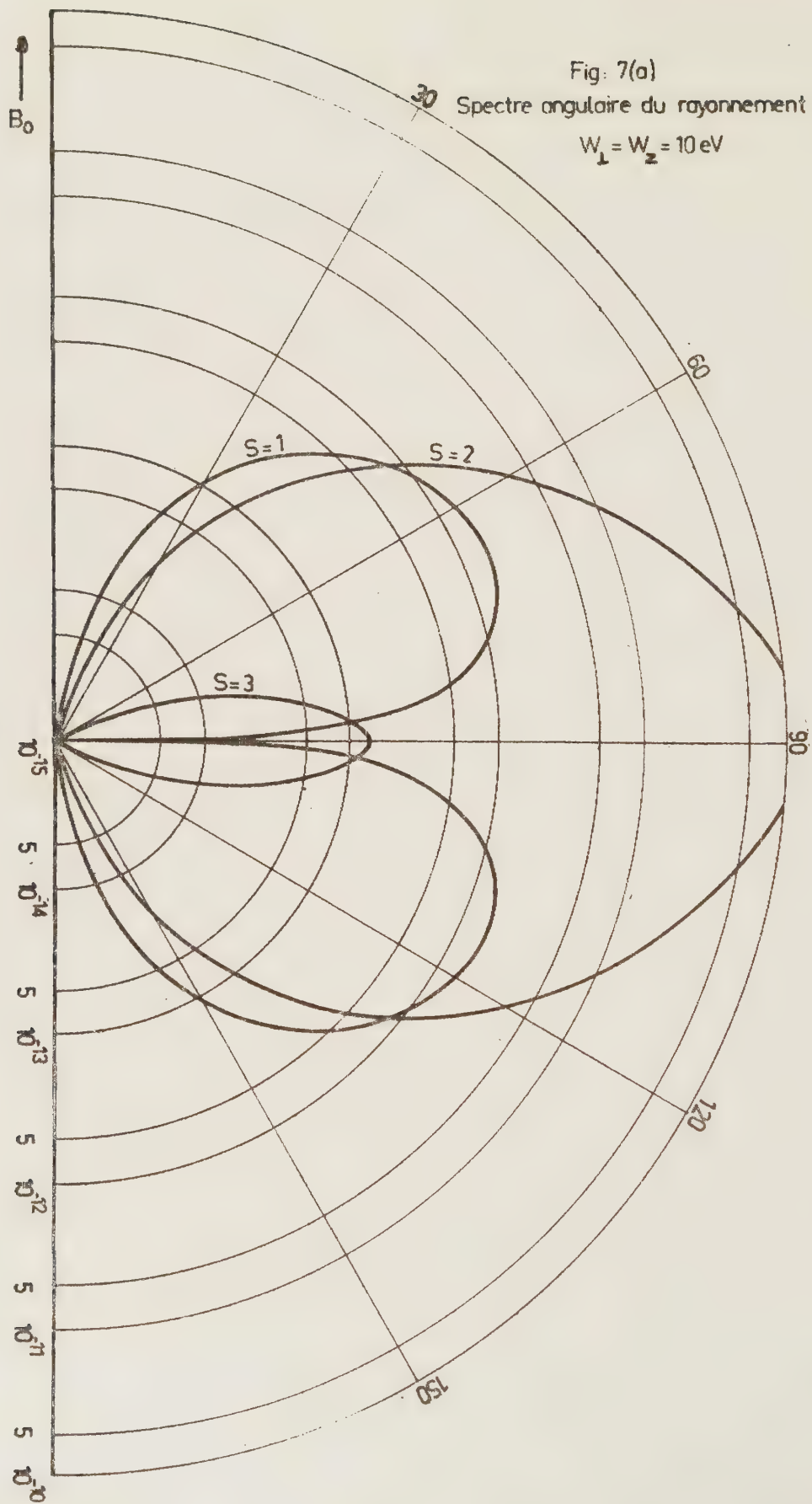


Fig 7(b)
 $W_{\perp}=10 \text{ eV}$ $W_{\parallel}=1 \text{ KeV}$

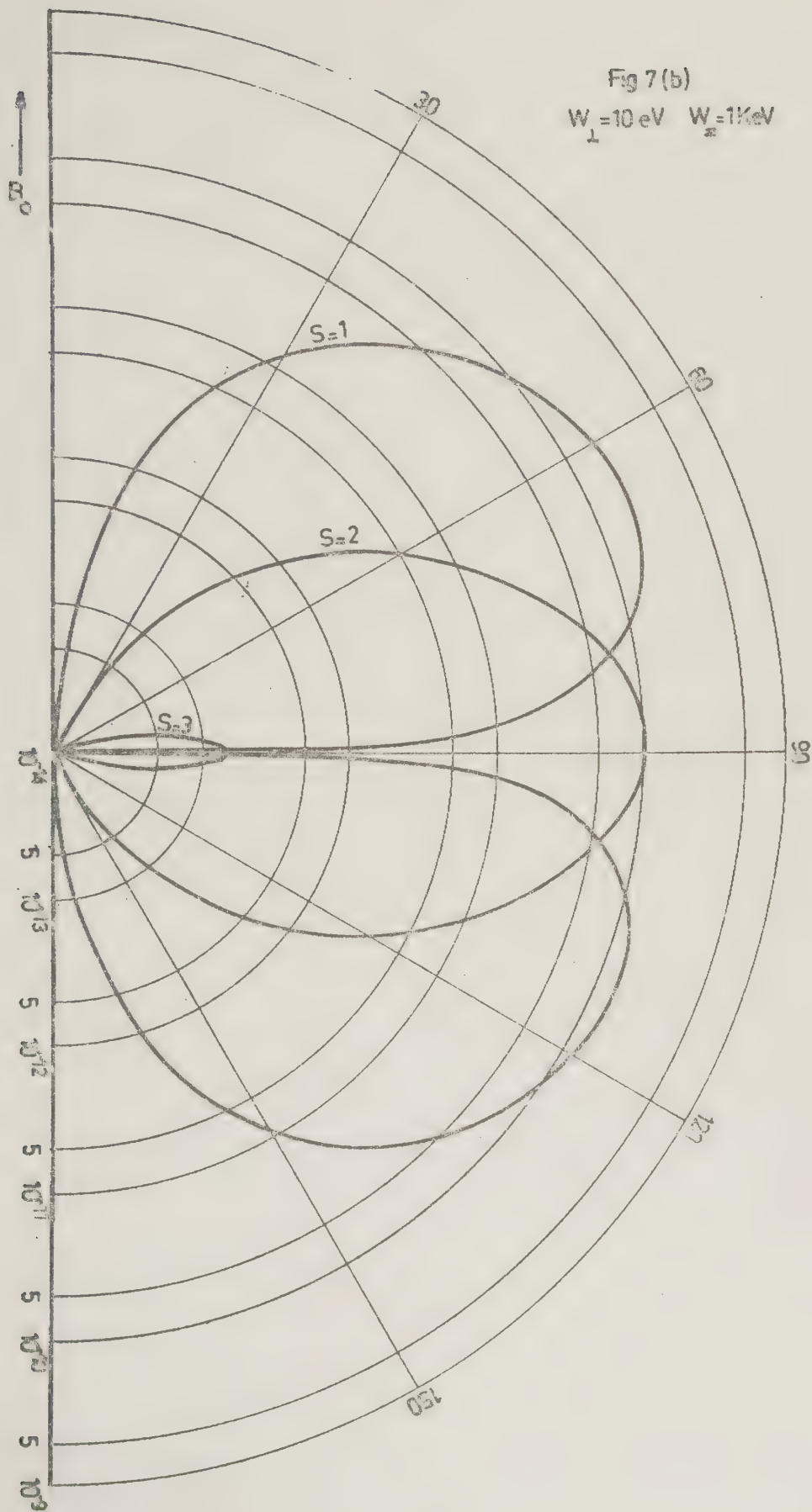


Fig. 7(c)
 $W_{\perp} = 1 \text{ KeV}$, $W_{\parallel} = 10 \text{ eV}$

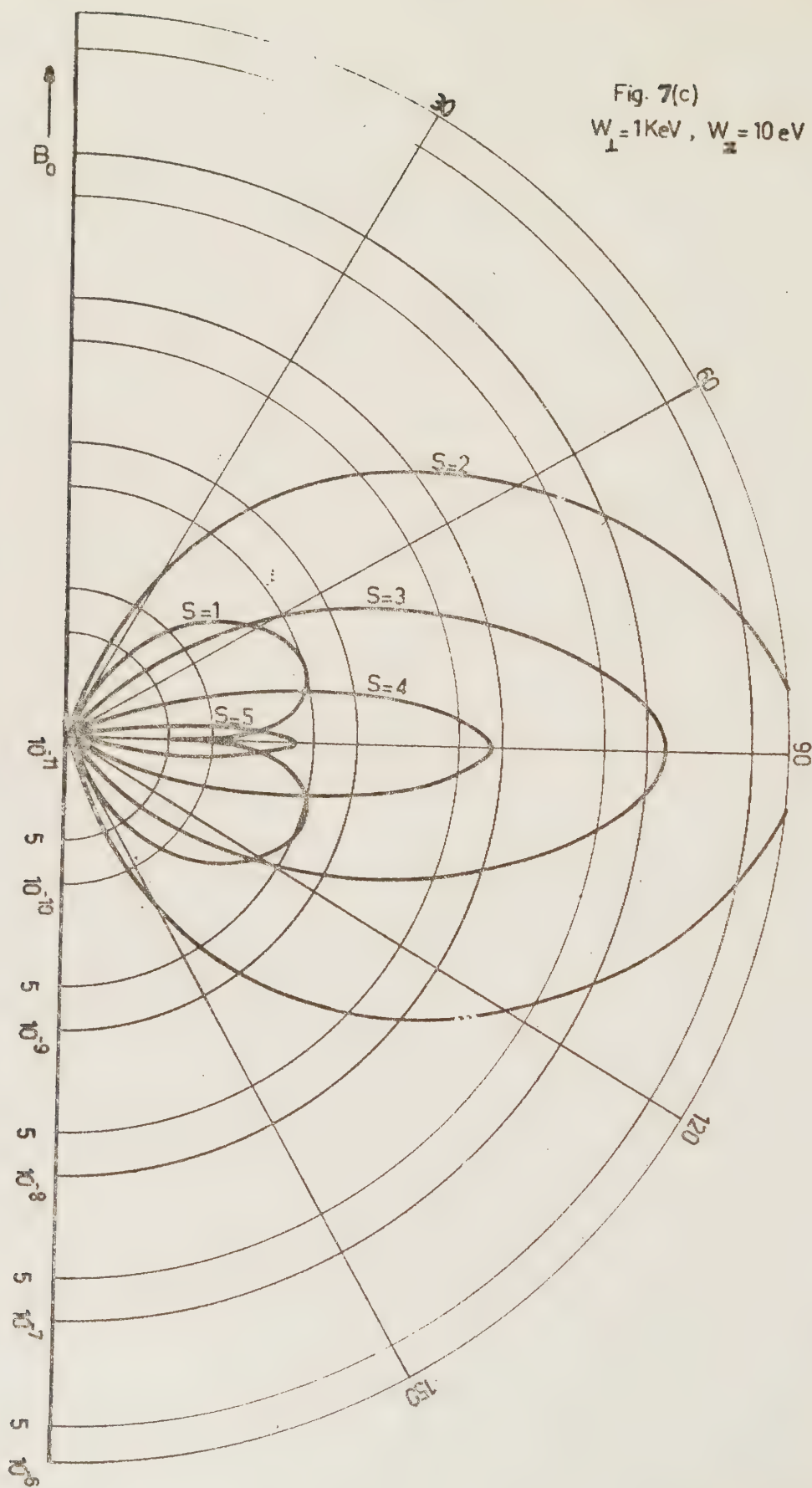


Fig. 3 (d)

SPECTRE DE FREQUENCE SUR LE FONDAMENTAL

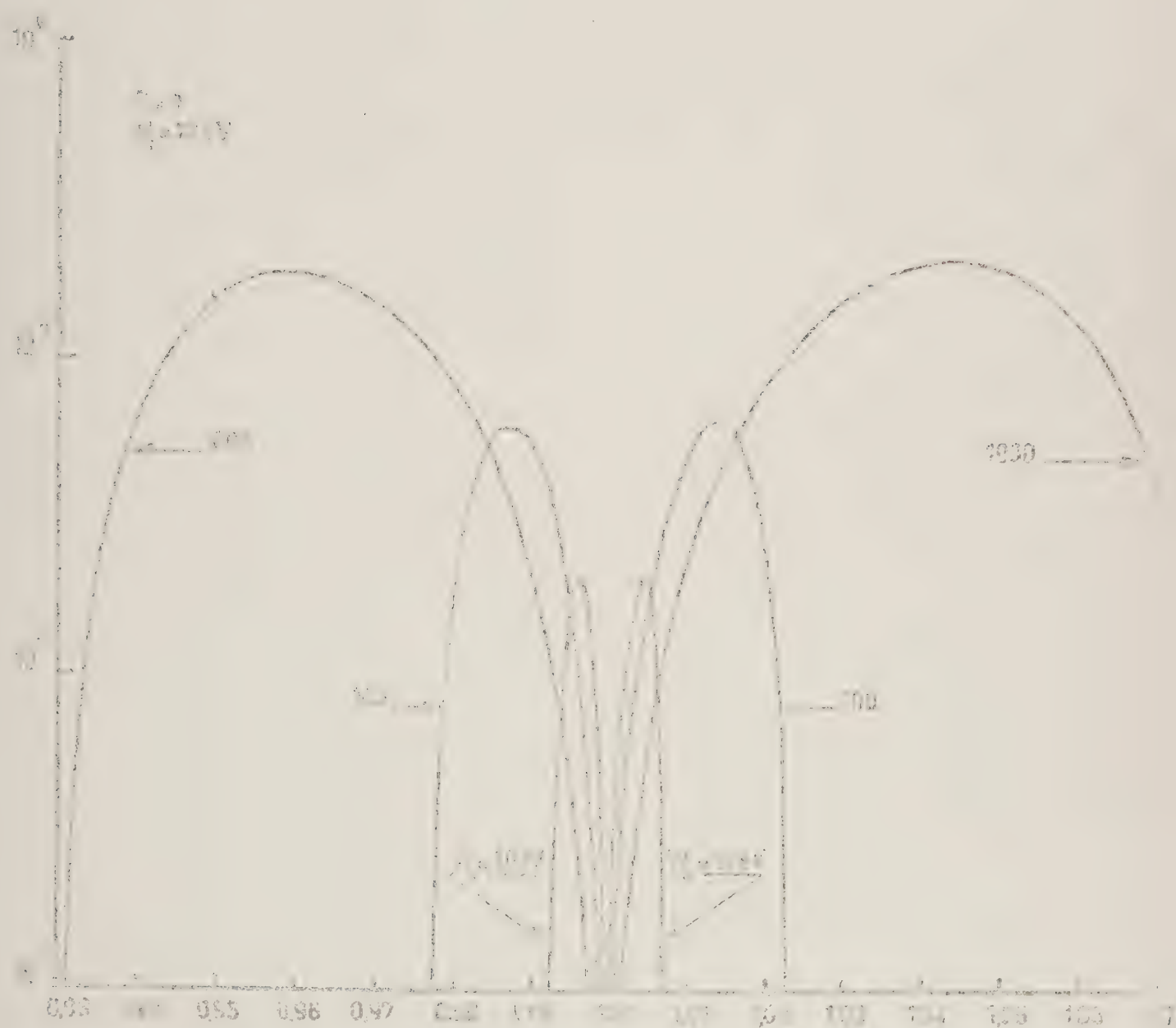


Fig. 8 (b)

SPECTRE DE FREQUENCE DE L'HARMONIQUE DEUX

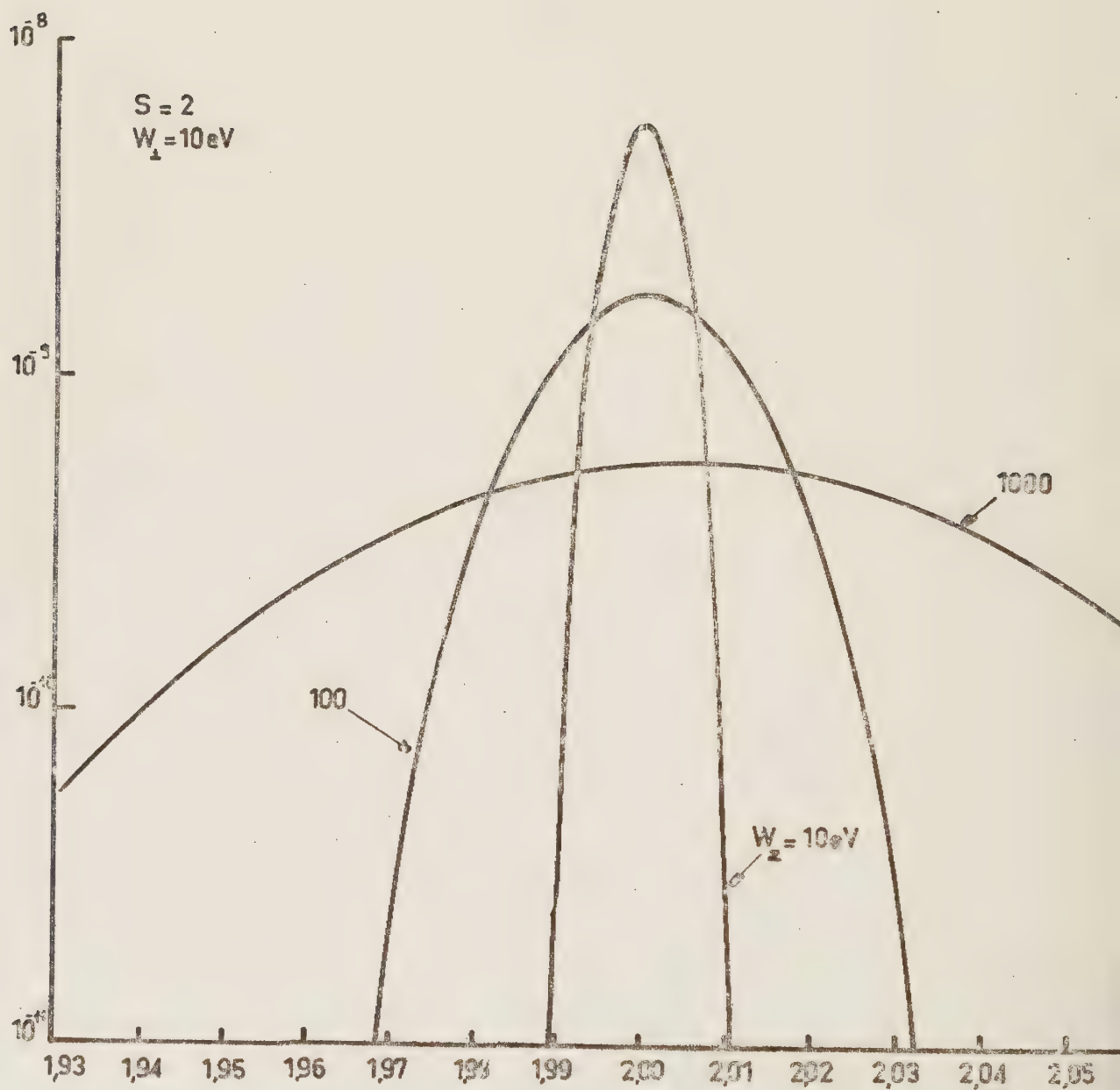
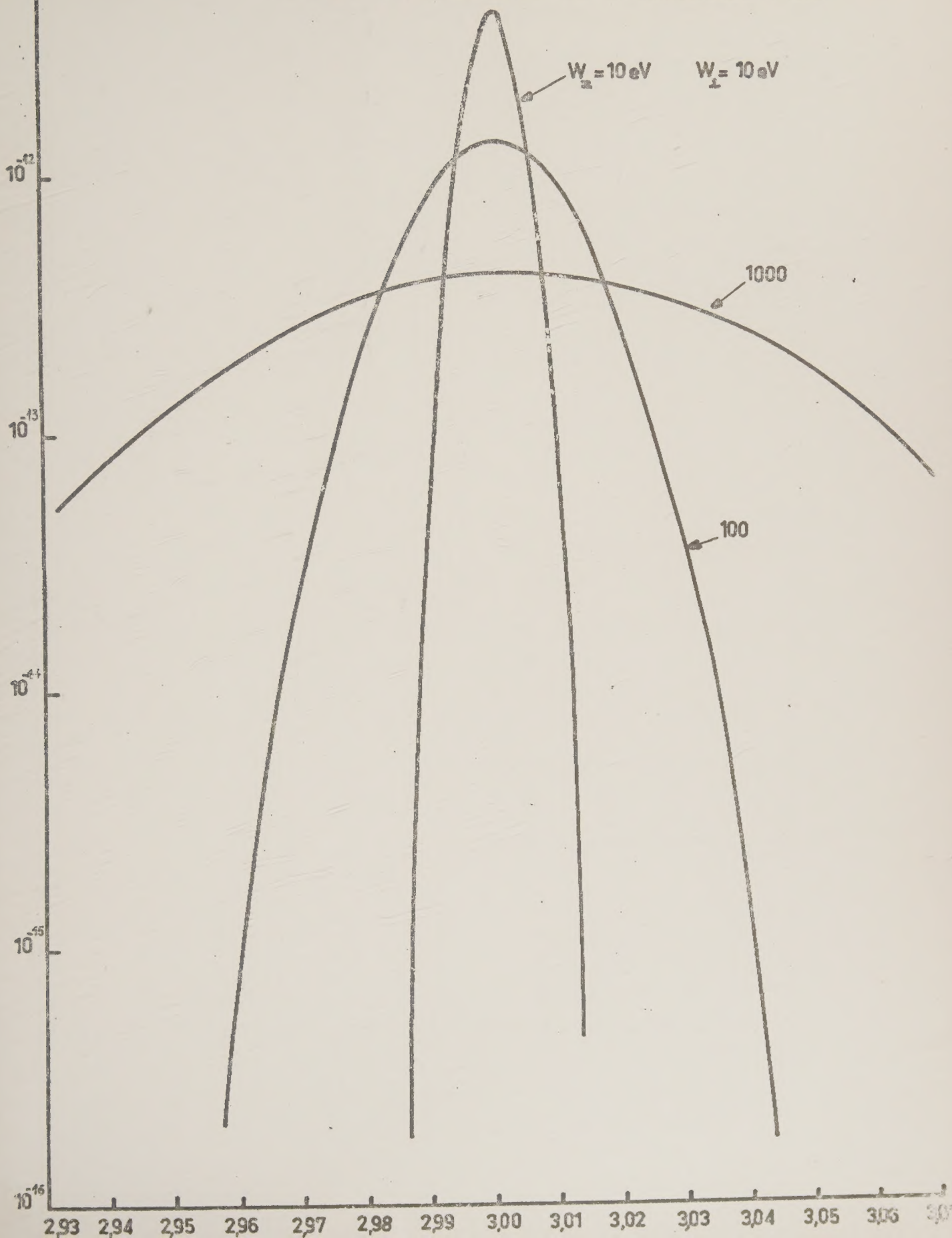
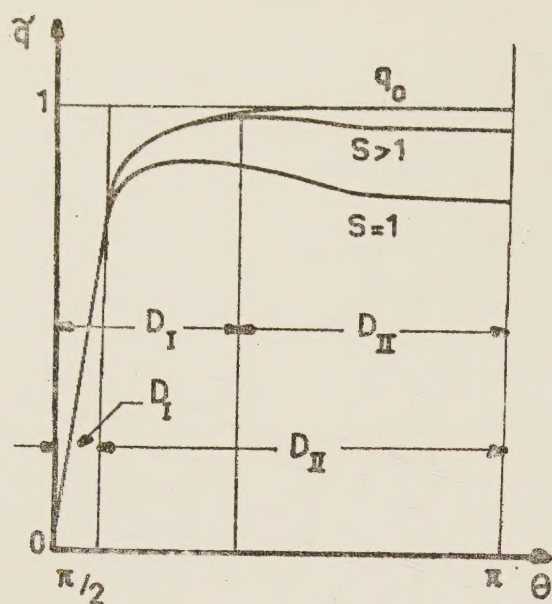


Fig 8(c)

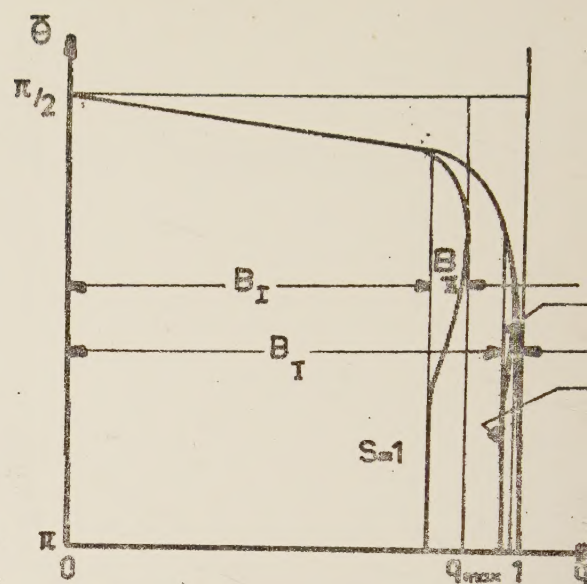
$S = 3$

SPECTRE DE FREQUENCE DE L'HARMONIQUE TROIS

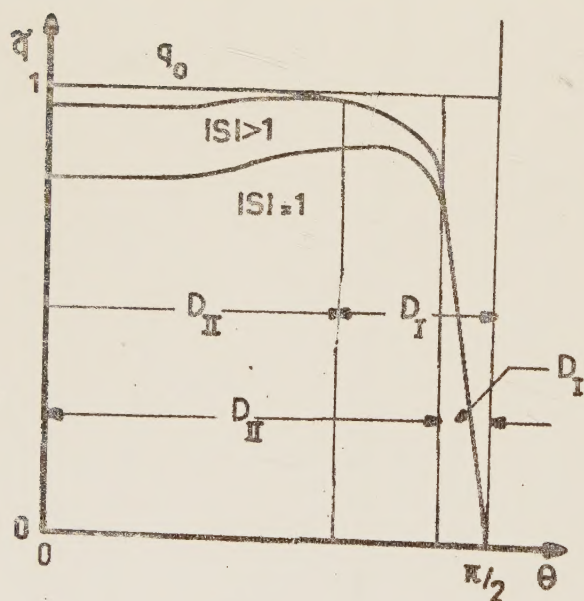




(a)



(b)



(c)

Fig. 9

Allure qualitative de la fréquence "cohérente" $\tilde{q}$ en fonction de θ et de l'angle d'émission $\bar{\theta}$ en fonction de q . Définition des domaines angulaires D_I et D_{II} et des gammes de fréquence B_I et B_{II} (les analogues de D_I et D_{II}) pour le fondamental ($s=1$) et les harmoniques d'ordre élevé ($|s|>1$).

